EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

30e JAARGANG 1954/55

II

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 12,50) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van L i w e n a g e l (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van W i m e c o s (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 10.— per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^{III}, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:

WISKUNDIGE CONSULTATIE IN DE PRACTIJK [1])

door

Prof. Dr D. VAN DANTZIG

Met bijzonder veel genoegen heb ik gevolg gegeven aan de uitnodiging, door Uw Bestuur tot het Mathematisch Centrum gericht, U een beeld te geven (dat natuurlijk tengevolge van de beperkte tijd slechts globaal en oppervlakkig kan zijn) van de wijze, waarop wiskundige problemen welker oplossing voor andere wetenschapsgebieden of het bedrijfsleven nodig is, door ons behandeld worden. Immers, niet slechts is deze uitnodiging vererend voor het Mathematisch Centrum, maar vooral is belangrijk, dat de daaruit sprekende wens, het wiskunde-onderwijs opnieuw te oriënteren op de behoeften der hedendaagse practijk, niet anders dan dit onderwijs ten goede kan komen.

Laat mij beginnen, U een overzicht te geven van de structuur van het Mathematisch Centrum. Het is een stichting, gesubsidieerd door het Rijk, t.w. de organisaties Z.W.O. en T.N.O., door de Gemeente Amsterdam, en, voor een klein deel, door het bedrijfsleven. De subsidiërende lichamen zijn alle vertegenwoordigd in het Curatorium aan welks goedkeuring de jaarlijkse begroting en andere belangrijke beslissingen onderworpen zijn, terwijl de dagelijkse leiding berust bij de Raad van Beheer, bestaande uit de Directeur en drie leden, allen hoogleraren.

Het Mathematisch Centrum bestaat uit vier afdelingen: voor zuivere wiskunde (Z), toegepaste wiskunde (T), statistiek (S) en numerieke wiskunde (R). De werkzaamheid van elk dezer afdelingen is deels van educatieve, deels van consultatieve, deels van zuiver wetenschappelijke aard.

De educatieve taak bestaat in het houden of organiseren van cursussen en voordrachten, vaak in samenwerking met andere organisaties, zowel voor wiskundigen van professie, als ook voor onderzoekers op andere gebieden, die hun kennis van bepaalde delen der wiskunde willen vermeerderen. Voorts omvat deze de opleiding van studenten en afgestudeerden in een aantal speciale richtingen. De wetenschappelijke werkzaamheid bestaat o.a. in het oplossen van

[1]) Voordracht, gehouden op 2 Januari 1954 voor de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie. Rapport S127 (V4) van het Mathematisch Centrum.

problemen, door een afdeling op eigen initiatief gesteld, die van wetenschappelijke betekenis zijn. Zoals gezegd, beperkt deze wetenschappelijke werkzaamheid zich geenszins tot de afdeling Z. Over de consultatieve taak zál ik zo aanstonds uitvoeriger spreken.

Zijn adviserende taak voert het Mathematisch Centrum uit ten behoeve van wetenschappelijke instellingen (b.v. universiteitslaboratoria, overheidsinstellingen, e.d.), individuele wetenschappelijke onderzoekers (b.v. promovendi), en het bedrijfsleven.

De gevraagde adviezen zijn van zeer uiteenlopende aard. Somtijds kan een gestelde vraag direct beantwoord worden, of kunnen met behulp van in het Centrum aanwezige kaartsystemen direct plaatsen in de literatuur aangegeven worden, waar het antwoord te vinden is. In de meeste gevallen echter hebben de onderzoekers die zich om een advies tot ons wenden hun probleem reeds te grondig bekeken, dan dat op zo eenvoudige wijze een antwoord gegeven zou kunnen worden.

De opdrachten, die massaal rekenwerk van een eenvoudig type inhouden, en waaraan dus in wiskundig opzicht weinig interessants te ervaren valt, buiten beschouwing latende, vermelden we vooreerst een groep van opdrachten, die vooral bij de Rekenafdeling binnenkomen, waarbij het voorbereidende wiskundige werk reeds verricht is, en uitsluitend de numerieke oplossing van een probleem gevraagd wordt. Om een denkbeeld te geven van de aard dezer problemen vermelden we er een, dat betrekking heeft op het bepalen van de stralingsdruk in het inwendige van sterren van een bepaald type. Daartoe moesten voor $n = 1$ en $n = 2$ de integralen

$$E_n(y) = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2} k_2(y\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x$$

waarin

$$k_2(z) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-zw}\frac{\mathrm{d}w}{w^2} = \mathrm{e}^{-z} + z\mathrm{Ei}(-z)$$

op eenvoudige wijze in getabelleerde functies uit te drukken is, voor een dertigtal waarden van y berekend worden.

Vervolgens moest uit

$$P_n(\sigma) = \int_1^\sigma (J(\sigma+y) - J(\sigma-y))\,E_n(y)\mathrm{d}y + \int_\sigma^{\sigma_m-\sigma} J(\sigma+y)E_n(y)\mathrm{d}y$$

waarin σ_m een gegeven constante en $P_1(\sigma)$ (op een gegeven constante factor na) een gegeven functie van σ is, voor $n = 1$ de onbekende functie $J(x)$ berekend en in dezelfde uitdrukking voor $n = 2$ gesubstitueerd worden; de functie $P_2(\sigma)$ was de gevraagde.

Als onderdeel van een ander probleem, dat op het gebied der

met behulp van de definitie van het getal formele relaties tussen dit getal en andere opstellen. B.v. $(\sqrt{2})^2 = 2$, $e^{i\pi} = -1$,

$$E_2(1) = 2\int_0^\infty e^{-2x^2}\left(\int_1^\infty e^{-wye^{-x^2}}\frac{dw}{w^2}\right)dx$$

In het tweede geval wenst men het beschouwde getal tussen de rationele getallen te rangschikken. Dan kan men het echter *uitsluitend* met een voorgeschreven *eindige* graad van nauwkeurigheid bepalen. Zodra men dit echter werkelijk gaat doen, vervallen alle limietbeschouwingen. Vandaar dat de numerieke wiskunde geen principieel verschil kent tussen een integraal en een benaderende som, of tussen een convergente oneindige reeks en een voldoend groot beginsegment, tussen een differentiaalvergelijking en een differentievergelijking, ja zelfs tussen een rationaal en een irrationaal getal. In de numerieke wiskunde wordt voor het eerst ernst gemaakt met het finitistische beginsel, dat ook aan de zogenaamde „intuïtionistische" wiskunde ten grondslag ligt, die bij Brouwer in de inconsequentie van de erkenning van een principieel verschil tussen het eindige en het oneindige is blijven steken, een feit, waarop Mannoury reeds in 1907 gewezen heeft. Het heeft geen enkele reële betekenis, $\aleph_0$ „oneindig" en $10^{10^{100}}$ „eindig" te noemen, en evenmin, te vragen welk getal dan het laatste „eindige" getal is of te „bewijzen" dat $10^{10^{1000}}$ toch werkelijk „groter" is dan $10^{10^{100}}$. Al deze „symbolen" hebben slechts „boekhoudkundige" betekenis, zonder „reële balanswaarde". Het is hier echter niet de plaats, uitvoeriger op deze kwestie in te gaan.

Bij vele andere problemen is samenwerking van de Rekenafdeling met andere afdelingen nodig. Bij voorbeeld stuitten de Nederlandse Spoorwegen op een stabiliteitsprobleem, dat wiskundig neerkwam op de vraag, onder welke voorwaarden de wortels van een zesdegraadsvergelijking, welker coëfficiënten veeltermen in 5 parameters waren, een negatief imaginair gedeelte bezitten. Deze vraag werd door Dr H. J. A. Duparc van de afdeling Z opgelost met behulp van eigenschappen van algebraische krommen, waarna de heren J. A. Zonneveld en Drs J. Berghuis en de rekenaarsters van de afdeling R een aantal typerende gevallen konden doorrekenen.

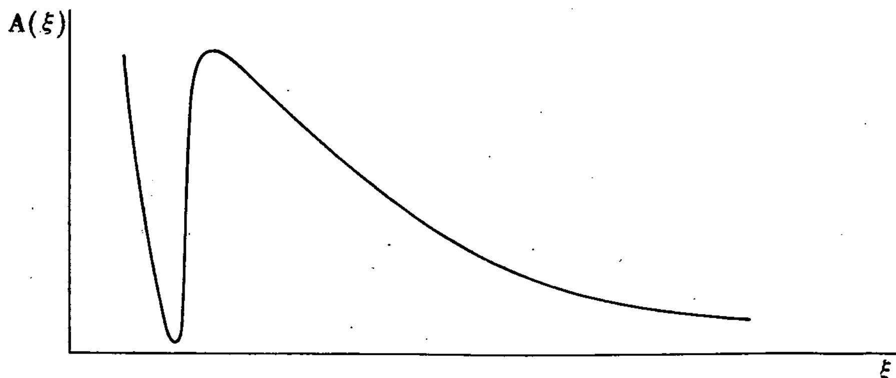
Ook komt het dikwijls voor, dat aan de afdelingen T en S problemen voorgelegd worden, waarvoor aldaar een oplossingsmethode wordt aangegeven, en die dan ten slotte door de afdeling R wordt uitgevoerd. Bij de afdeling T geschiedde dit bij voorbeeld met enkele problemen, afkomstig van de Waterleidingen, die betrekking hadden op het zoetwaterreservoir dat zich in en onder de duinen bevindt,

quantum-mechanica ligt, moest de niet-lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2A}{d\xi^2} = \frac{1}{A(\xi)^3} - \left(1 - \frac{l(l+1)}{\xi^2} + \frac{a}{\xi^6} - \frac{b}{\xi^{12}}\right) A(\xi),$$

voor een aantal waarden der parameters l, a en b numeriek geïntegreerd worden, met de „beginvoorwaarde" $\lim_{\xi \to \infty} A(\xi) = 1$. Voor sommige waarden der parameters deed zich hierbij de omstandigheid voor, dat de functie $A(\xi)$ na (van rechts komende) eerst sterk gestegen te zijn, plotseling zeer snel ging dalen, tot waarden van de orde van 10^{-7} toe. Het scheen daardoor, alsof er voor een onbekende waarde van ξ een singulariteit zou optreden.

Met behulp van een eenvoudige approximatie kon echter aangetoond worden, dat de functie nog net voor de ξ-as bereikt te hebben, scherp rechtsomkeert maakt (met een $A''(\xi)$ van de orde van 10^{21}!), waarna de integratie weer gewoon kan worden voortgezet.



Het is duidelijk, dat een dergelijk merkwaardig verloop van de kromme grote zorg vereist bij de bepaling van de nauwkeurigheid, waarmede men stap voor stap voortschrijdt. De numerieke oplossing van dit probleem vindt thans plaats met behulp van de in het laboratorium van het Mathematisch Centrum geconstrueerde „ARRA" (= Automatische Relais Rekenmachine Amsterdam).

Naar aanleiding van deze en dergelijke problemen wil ik een opmerking maken, die het fundamentele verschil tussen de formele en de numerieke wiskunde in het oog stelt, en die daarom ook voor het elementaire onderwijs van belang is.

Men kan een irrationeel getal, zij het een „eenvoudig" getal als $\sqrt{2}$ of ook e of π zij het gecompliceerd als b.v. de boven gedefinieerde functie $E_2(y)$ voor $y = 1$ op tweeërlei wijzen beschouwen: hetzij formeel, hetzij numeriek. In het eerste geval kan men uitsluitend

Regeneratievermogen van poliepen;
Groeiproeven met kuikens;
Keuring van thermometers;
Veneuze druk bij de gezonde mens;
Verdelgingsmiddelen voor kakkerlakken;
Schoolbezoek in Suriname;
Invloed van ergotamine op de aciditeit van het maagsap;
Invloed van het gebruik van spreekuurbriefjes op het verzuim van spreekuurbezoek;
Getijdenberekeningen;
Invloed van regen en temperatuur op roggeopbrengst;
Physiologisch trainingsonderzoek;
Cholesterolgehalte in voeding en bloedserum;
Verhoging van de grondwaterstand door het brengen van rivierwater naar de duinen;
Pulscode-modulatie;
β-Radioactiviteit;
Band-doorlatende filters;
Luchtkrachtcoëfficiënten;
Betontabellen;
Grenslaaginterferentie;
Bacteriologisch wateronderzoek;
IJkmethode voor leverextracten;
Analgesieproeven op ratten en marmotten;
Diagnose van Coeliaki;
Aequivalentiebeginsel in de herverzekering;
Diagnose van rheumapatiënten;
Wachttijden van vliegtuigen bij landing;
Verschillende problemen over extreem hoge waterstanden.

Het begint haast op het pak van Sjaalman te gelijken!

Laat mij trachten, U een denkbeeld ervan te geven, hoe zulk een consultatie verloopt, door uitvoeriger in te gaan op de wijze, waarop deze in de statistische afdeling geschiedt, en laat mij daartoe het geval beschouwen, dat een medicus een onderzoek heeft verricht en zich tot ons wendt met de vraag, welke van de conclusies, die hij meent uit zijn experimenten te mogen trekken, wel, en welke niet „statistisch verantwoord" zijn. Natuurlijk geldt mutatis mutandis het volgende ook voor onderzoekers op andere gebieden.

Zij die met een dergelijke vraag tot ons komen bezitten vrijwel zonder uitzondering een aanzienlijk groter belangstelling voor en kennis van de wiskunde dan het merendeel van hun collega's. Zij hebben dan ook doorgaans enkele boeken gelezen, waarin medische

en met berekeningen, uitgevoerd door Drs T. C. Braakman en Drs G. W. Veltkamp van de getijdebewegingen op de benedenrivieren, afkomstig van de Δ-commissie. Ook komen wel problemen voor, waarbij uitsluitend de afdeling Z betrokken is. Zo werd b.v. door de N.V. Philips gevraagd, te onderzoeken, of een vermoeden van Prof. Tellegen juist was, dat betrekking had op het bestaan van reële oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen met complexe coëfficiënten, dat aan bepaalde voorwaarden voldeed, een vermoeden dat ontstaan was bij de studie van bepaalde electrische netwerken, en ook voor het voortgezette onderzoek daarvan van belang, en waarvan de juistheid inderdaad door Dr H. J. A. Duparc, Drs C. G. Lekkerkerker en Dr W. Peremans bewezen kon worden.

Terwijl de tot dusverre genoemde problemen nog voor het grootste deel tot de „gewone wiskunde" behoren, met name tot de klassieke analyse, hebben de aan de afdeling S gestelde vragen doorgaans een geheel ander karakter. Bovendien bestrijken zij een veel groter gebied van het wetenschappelijk en maatschappelijk leven, en worden zij vaak gesteld door onderzoekers, die een veel geringere wiskundige scholing bezitten.

Behalve het klassieke toepassingsgebied, de levensverzekeringswiskunde, en het tegenwoordig algemeen bekende gebied van de industriële kwaliteitscontrôle zijn het hier vooral de medisch-biologische wetenschappen en de econometrie, met verwante vakken als de schadeverzekering, van waar uit statistische en waarschijnlijkheidstheoretische problemen toestromen.

Om U enig denkbeeld te geven van de diversiteit van gebieden, waarin tegenwoordig wiskunde wordt toegepast, kies ik, vrij willekeurig, een aantal uit de honderden onderwerpen waarover de laatste jaren door de verschillende afdelingen van het Mathematisch Centrum rapporten zijn uitgebracht.

Mathematische scheepsvormen;
Afscheiding van 17-ketosteroïden;
Seismische golven;
Functies voor een levensverzekeringsmaatschappij;
Cariës-onderzoek;
Stabiliteitskrommen van rijwielen;
Vormverandering van lagervlakken tengevolge van druk in de olielaag;
Groeiproeven met Wistar-ratten;
Trillende vleugel in subsone stroming;
Verdampingssnelheid van vloeistofdruppels;

statistiek behandeld wordt, en zich meer dan eens ook in een algemeen statistisch werk verdiept; zij het dat zij dáárin meestal al spoedig op te grote moeilijkheden stuiten. Zij zijn daardoor dan ook meestal wel in staat, de eenvoudige rekenkundige bewerkingen, die het statistisch onderzoek vergt, uit te voeren, indien dit althans niet te grote afmetingen aanneemt, maar wenden zich b.v. tot ons met de vraag, of het in hun geval al dan niet „geoorloofd" is, een bepaalde formule die zij in hun boek vinden toe te passen. Dit komt doordat de schrijvers van dergelijke toegepast-statistische werken (die toch zonder uitzondering aanzienlijk méér belangstelling en begrip voor de wiskunde moeten hebben dan de gemiddelde abituriënt) vrijwel zonder uitzondering alle critische zin ten aanzien van het geldigheidsgebied van bepaalde statistische methoden ontberen, en daarover gewoonlijk in het geheel niet spreken. Een feit dat hen, die in een „principe van de overdracht" geloven tot nadenken moet stemmen.

Terwijl dus enerzijds de medicus met een volkomen ontoereikende wiskundige kennis is uitgerust, staan anderzijds de wiskundige consultanten — zij het één der leiders van de afdeling of één der medewerkers, met een of meer assistenten — voor de moeilijkheid, dat zij als wiskundigen slechts een vaag denkbeeld hebben van wat b.v. een titratie is, en in het geheel niet weten wat b.v. anti-streptolysine of het verschil tussen acuut rheuma en rheumatoïde arthritis is. Dit bezwaar blijkt echter niet ernstig te zijn. Wij leren al gauw deze woorden gebruiken, zodat, zoals Conrad zou zeggen, wij op papegaaien gelijken, die een zó grote vaardigheid in het spreken hebben verkregen, dàt men zich somtijds nauwelijks aan de indruk kan onttrekken dat wij werkelijk iets begrijpen van wat wij zeggen. Overigens leidt deze situatie, waarbij de wiskundige zònder een recht begrip van biologie, economie, e.d. tòch over deze onderwerpen adviezen moet en kan uitbrengen, anderzijds met betrekking tot het wiskunde-onderwijs tot de ietwat pijnlijke vraag, of wij wèrkelijk goed doen, de medicus, bioloog, etc. te verhinderen, zich op de middelbare school de wiskundige vaardigheden te verwerven waaraan hij dringend behoefte heeft, zolang hij zich niet „het juiste begrip" van b.v. de integraaldefinitie heeft eigen gemaakt.

Nadat, in een vaak vrij langdurig gesprek, de wiskundige zich een globaal denkbeeld gevormd heeft van de wijze waarop de experimenten genomen zijn, van de meetnauwkeurigheid, en van de gegevens en het doel van het onderzoek, tracht hij door een reeks vragen de onderzoeker te dwingen zijn doel- en probleemstelling te preciseren en te concretiseren. Het feit, dat dit vrijwel zonder uit-

zondering nodig is, wekt wederom gegronde twijfel aan het „beginsel van de overdracht". Of, om G. Mannoury te citeren: „Schaken leert schaken, maar geen wiskunst. Wiskunst leert wiskunst, maar geen redelijkheid".

De consultant geeft vervolgens een beknopte uiteenzetting van de beginselen der wiskundige statistiek, die eigenlijk menig abituriënt zou moeten kennen. Hij spreekt dus over de toetsbaarheid van een hypothese of andere onderstelling; hij zet uiteen, dat men zulk een hypothese nooit kan bewijzen, maar uitsluitend weerleggen, en dat ook dit laatste alleen kan geschieden met een beperkte betrouwbaarheid, d.w.z. als men van te voren toelaat, dat een voorgeschreven fractie van de te trekken conclusies fout mag zijn. Deze fractie wordt de „onbetrouwbaarheidsdrempel" (Engels: level of significance) genoemd en doorgaans conventioneel op 0,05 vastgesteld. Hij zal dit alles uiteenzetten geheel aan de hand van het door de medicus gedane onderzoek, zodat het gehele betoog binnen diens eigen voorstellingswereld zinvol blijft. Indien b.v. de medicus wil trachten te „bewijzen", dat een behandelingswijze een physiologische grootheid — b.v. de aciditeit van het maagsap — verandert, zal de consultant aantonen, dat alleen de hypothese getoetst kan worden, dat het middel geen enkele invloed op de grootheid heeft, in de hoop dat deze hypothese spr 0,05, (d.w.z. salva probabilitate 0,05: onder voorbehoud van een waarschijnlijkheid $\leqq$ 0,05) verworpen zal kunnen worden. Vervolgens zal hij trachten te ervaren, welke alternatieve hypothesen mogelijk zijn, b.v. of de physiologische grootheid alleen vergroot kan worden, dan wel ook kan afnemen, en dan een bepaalde toetsingsmethode voorstellen, die ten opzichte van deze alternatieven een voldoend groot onderscheidingsvermogen bezit, d.w.z. in voldoend vele van de gevallen, waarin de getoetste hypothese niet juist is, ook werkelijk tot verwerping daarvan leidt. De consultant zal daarbij teneinde dit onderscheidingsvermogen te kunnen vergroten, trachten deze klasse van alternatieve hypothesen zoveel mogelijk te beperken door aan de hand van een reeks vragen te ervaren welke hypothesen de experimentator meent met zekerheid op grond van vroegere, zij het wellicht ongeanalyseerde ervaring, dus „a priori", te kunnen uitsluiten. Hij zal er zich dus van vergewissen, of de verschillende experimenten werkelijk alle onafhankelijk zijn, dan wel of ongemerkt afhankelijkheden kunnen zijn binnengeslopen; of de ten grondslag liggende waarschijnlijkheidsverdeling werkelijk binnen elke groep van experimenten constant is, dan wel of deze aan onbemerkte systematische veranderingen onderhevig is. Hierbij komen soms zeer merkwaardige dingen voor de dag. B.v.

het feit, dat waarnemingen gedaan bij proefpersonen, die zich vrijwillig aanmelden, allééén karakteristiek blijken te zijn voor een duidelijk geselecteerde bevolkingsgroep: wanneer men lichaamsafmetingen, die voor de confectie-industrie van belang zijn, meet bij een groot aantal vrijwillige proefpersonen, vindt men vrij zeker een onjuiste fractie van degenen die een bijzonder fraaie lichaamsbouw hebben. Of het feit, dat andere oorzaken dan een toegediend middel veranderingen in een gemeten grootheid kunnen teweegbrengen: wanneer men b.v. de snelheid meet, waarmede ratten op een pijnprikkel reageren, mèt en zonder toediening van een pijnstillend middel, loopt men groot gevaar, de getoetste hypothese *ten onrechte* te verwerpen, indien men b.v. alle dieren des ochtends zonder en des middags met het middel aan het experiment onderwerpt, vooral als de ratten in de tussentijd gegeten hebben, en daardoor vadsiger geworden zijn. En wanneer bij een aantal proefpersonen het cholesterolgehalte van het bloed bepaald wordt door groepen van telkens 8 bloedsera met eenzelfde standaardoplossing te vergelijken, en als de verschillende standaardoplossingen niet precies overeenstemmen, loopt men gevaar, tot de conclusie te komen, dat het cholesterolgehalte op dezelfde wijze varieert bij personen, die aan eenzelfde dieetverandering onderworpen zijn, of die tezamen hun emoties beleven (b.v. echtparen), wanneer men niet vermijdt, dat deze telkens bij eenzelfde groep van 8 ingedeeld worden.

Dit alles heeft met wiskunde weinig te maken, maar het is „toegepaste logica", en behoorde dus vanzelfsprekend te zijn voor ieder die wiskunde-onderwijs genoten heeft, indien het waar was, dat dit het „logisch denken" ook over andere onderwerpen dan wiskunde bevorderde. Het *is* ook alles vanzelfsprekend — als men er eenmaal aan denkt, maar dat is niet altijd het geval. Ook niet bij de wiskundigen, zolang ze niet speciaal in deze richting getraind zijn.

Bij de keuze van een toetsingsmethode moet de consultant een evenwicht zoeken tussen de uitingen van zijn mathematische en die van zijn maatschappelijke geweten. Als hij alleen zijn wiskundig geweten laat spreken en *alle* mogelijkheden, die niet volledig ondenkbaar zijn — en dat zijn er geen — mede in aanmerking neemt, kan hij *nooit* een hypothese a priori uitsluiten. Maar dan kan hij ook nooit een hypothese toetsen, en dus ook geen wetenschappelijke onderzoeker werkelijke hulp bieden. Hulp, die deze dringend behoeft. Hij zal dus zijn logica moeten toepassen in de zin van „gezond verstand", van buiten beschouwing laten van mogelijkheden, als er geen redelijke grond is, aan te nemen dat zij gerealiseerd zullen zijn, zonder zich om *deductieve* logica te bekommeren. Dit laatste

zal hij eerst weer gaan doen, indien hij niet meer als *consultant* optreedt, maar als een wiskundige, die nieuwe toetsingsmethoden ontwerpt, en dan zuiver deductief *bewijst*, dat zij inderdaad de geponeerde eigenschappen bezitten, (b.v. een willekeurig voorgeschreven onbetrouwbaarheidsdrempel niet overschrijden). Een bewijs, dat overigens natuurlijk maar alleen formele betekenis heeft, want het gaat uit van onderstellingen, die in de toepassing nooit in exacte zin vervuld zijn, zodat er nooit volledige zekerheid kan zijn, dat de onbetrouwbaarheidsdrempel werkelijk niet overschreden wordt. Bij deze wiskundige werkzaamheid echter laat hij uitsluitend zijn wiskundig geweten aan het woord: láát het dan kunnen voorkomen, dat te veel statistische conclusies niet juist blijken te zijn; maar aan de wiskunde mag het niet liggen!

Dit ontwerpen van nieuwe toetsingsmethoden, die tegenover een grote klasse (mathematisch geweten!) van alternatieve mogelijkheden toch een voldoende groot onderscheidingsvermogen hebben (maatschappelijk geweten) is dus een belangrijke taak van de afdeling S van het Mathematisch Centrum. Daarnaast wordt ook een educatieve taak uitgevoerd, doordat de belangrijkste statistische begrippen en methoden in de vorm van korte memoranda ten behoeve van de onderzoekers worden beschreven, als „recepten" dus, zonder enig bewijs. Ook streven wij er naar, ons zelf overbodig te maken — al zal dit wel niet geheel gelukken — doordat wij de onderzoekers meer en meer leren, hun toetsingen zèlf uit te voeren, voor zoverre deze een eenvoudig routine-karakter hebben. Ook hier bewijzen de „receptenverzamelingen" goede diensten. Nodig is dus voor de onderzoekers: goed begrijpen wat statistische toetsing is, zich zorgvuldig afvragen, welke mogelijkheden *niet* a priori uitgesloten kunnen worden, weten of de te gebruiken toets tegenover deze mogelijkheden voldoende onderscheidingsvermogen bezit en de voor toepassing van de toets benodigde berekeningen zonder fouten kunnen uitvoeren. Kennis van de wiskundige stellingen die aan de toets ten grondslag liggen, a fortiori van hun bewijzen is voor hen niet van het minste belang.

Nadat ik — om een geijkte formule te gebruiken — meen de mij door Uw bestuur opgedragen taak te hebben volbracht door U een, natuurlijk summier en in grove trekken geschetst, beeld te geven van Wiskundige Consultatie in de Practijk, wil ik de gelegenheid, mij tegenover een gehoor van leraren in de wiskunde uit te spreken, benutten om enkele opmerkingen te maken over een onderwerp dat

mij — zij het wellicht tamelijk platonisch — sinds meer dan 25 jaren na aan het hart ligt: het wiskunde-onderwijs op de middelbare scholen: H.B.S., Lyceum en Gymnasium.

Voor zoverre mijn opmerkingen bestaande toestanden critiseren — en dat doen zij — vereisen zij dat ik de opmerkingen laat voorafgaan:

1° dat ik *niet* van mening ben; dat het onderwijs in de omliggende landen, voor zoverre ik dit ken, wezenlijk beter is dan ten onzent;

2° dat ik *niet* van mening ben, dat het onderwijs in de meeste andere leervakken, voor zoverre ik dat beoordelen kan, wezenlijk beter is dan dat in de wiskunde;

3° dat ik *niet* van mening ben, dat de tekortkomingen, die ik meen te moeten signaleren aan de leraren in de wiskunde moeten worden geweten, want de meeste hunner hebben door hun opleiding en hun overbelaste werkkring nooit gelegenheid gehad met de hedendaagse wiskunde kennis te maken.

Ook moet opgemerkt worden, dat deze opmerkingen uitsluitend voor mijn persoonlijke verantwoordelijkheid komen, en niet geacht mogen worden, de opvatting van het Mathematisch Centrum als zodanig weer te geven.

De plaats van de wiskunde in wetenschap en samenleving is de laatste halve eeuw ingrijpend veranderd. Terwijl dit verschijnsel voorheen nog niet voor allen waarneembaar was, heeft deze ontwikkeling thans een zodanig, welhaast explosief, karakter gekregen, dat zij een ingrijpende heroriëntering van het onderwijs in de wiskunde dringend nodig maakt.

Dit is, kort samengevat, de kern van mijn opmerkingen, die ik thans iets nader wil toelichten.

Dat wiskundige methoden behalve in de klassieke toepassingsgebieden: sterrekunde, natuurkunde, technische en actuariële wetenschappen, thans in een veel grotere kring van het moderne leven zijn doorgedrongen, zal U, voor zoverre U het niet reeds wist, wel uit „Sjaalmans pak" duidelijk zijn geworden. Toch geeft deze lijst daarvan nog slechts een zeer onvolledig beeld. Verschillende toepassingsgebieden zijn daarin niet of nauwelijks ter sprake gekomen. Ik noem slechts: de variantie-analyse in de landbouwwetenschap en andere wetenschappen, waar experimenten systematisch ontworpen worden; de factor-analyse in de psychologie; de biomathematica met haar niet-statistische wiskundige behandeling van biologische en sociologische problemen; de informatietheorie en cybernetica met haar toepassingen op de physiologie van het zenuwstelsel; de theorie der strategische spelen en haar toepassingen op de econo-

mische en andere decisieproblemen; de theorie der stochastische processen met haar veelvuldige toepassingen, o.a. op de ontwikkeling van menselijke, dierlijke en plantaardige bevolking onder invloed van geboorte, sterfte en migratie, maar ook op de kernsplijting, e.a.

Men zou derhalve verwachten, nu een zoveel grotere groep van mensen dan vroeger met wiskundige methoden in aanraking komt, dat dienovereenkomstig het belang van het middelbaar onderwijs in wiskunde zou zijn toegenomen.

Het tegendeel is echter het geval. En wel tengevolge van het feit, dat dit onderwijs in hoge mate verouderd is, en vrijwel geen enkel aanknopingspunt met de moderne wiskunde meer biedt.

Wanneer ik terugdenk aan de wiskunde, die ik zelf indertijd, en met zoveel plezier, op school geleerd heb, b.v. aan de formules voor hoogtelijn, zwaartelijn, hoekdeellijn, aan de stelling van Stewart, de eigenschappen van om-, in- en aangeschreven cirkels, de koorden en raaklijnenvierhoeken, de eigenschappen van regelmatige n-hoeken, dan moet ik zeggen, dat ik in mijn loopbaan als wiskundige géén van deze zaken ooit heb kunnen gebruiken; nòch in enig gebied van zuivere, nòch van toegepaste wiskunde. Met uitzondering natuurlijk van de perioden waarin ik eindexamen afnam. Hetzelfde geldt voor de *gehele* beschrijvende meetkunde, voor de stereometrie met uitzondering van de inhoud van een viervlak, inhoud en oppervlakte van een bol, een bolsector en een bolsegment, welke echter in de integraalrekening behoren, enkele zwaartepuntseigenschappen van een viervlak e.d., en het regelmatige 6- en 8-vlak. Het voorkomen van de dodekaëdergroep in de theorie der automorfe functies, en van half-regelmatige lichamen in de kristallografie laat ik nu maar buiten beschouwing. Ook de trigonometrie (in tegenstelling tot de goniometrie) heb ik, al is deze natuurlijk fundamenteel voor de astronomie, de geodesie en de navigatieleer, zelf nooit kunnen toepassen, met uitzondering natuurlijk van de cosinusregel, en desnoods de sinusregel.

Met andere woorden, afgezien van enkele kleine en zeer specialistische gebieden, houdt, zuinig geschat, $^3/_4$ van de schoolwiskunde *geen enkel* verband met de hedendaagse toegepaste wiskunde, noch ook met de fundamentele gebieden der hedendaagse zuivere wiskunde.

Aan het verschil tussen „zuiver" en „toegepast" ligt het overigens niet. Met uitzondering, wellicht, van plani- en stereometriec over de overstromingen van de Nijl spreken we nu maar niet) is alle schoolwiskunde toegepaste wiskunde geweest. Gonio- en trigonometrie zijn als hulpmiddel van de hemelmechanica ontstaan. De beschrijvende

meetkunde is door Monge ingevoerd omdat in de 18e eeuw de numerieke methoden te moeizaam en omslachtig waren. Logarithmen zijn zuiver als rekentechnisch hulpmiddel ingevoerd. Vierkantsvergelijkingen werden „opgelost" met behulp van wortelvormen, omdat de wortels destijds nog vrijwel de enige functies waren, die men kende en numeriek kon beheersen.

Het ergste echter is de massaproductie van sommen. Ik schat de jaarlijkse „productie" op minstens 10^8, de L.S. buiten beschouwing gelaten. Ook wanneer men de weerzinwekkende monstruositeiten, die de Heer P. Wijdenes onlangs nog voor het *toelatingsexamen* aan de kaak gesteld heeft, buiten beschouwing laat, en alleen op de nauwelijks minder monstrueuse eindexamensommen let, kan men onmogelijk volhouden, dat de talloze uren, daaraan besteed, enig ander „nut" afwerpen dan dat ze een aantal leerlingen bij de overgang of voor het eindexamen doen zakken of, wat de beschrijvende meetkunde betreft, doen slagen.

Terwijl dus enerzijds een geenszins te verwaarlozen aantal wetenschappelijke onderzoekers en hun assistenten dringend verlegen zit om wiskunde-vaardigheden, die de middelbare school hun niet heeft kunnen geven, worden er, wanneer ik de tijd aan huiswerk besteed medereken, jaarlijks vele millioenen man-uren — of, zo U wilt, leerling-uren — besteed aan wiskunde-onderwijs, waarvan het nuttig effect met enkele procenten hoog getaxeerd is. Het is duidelijk, dat een her-oriëntering van de wiskunde dringend noodzakelijk is. Ik acht daarom de keuze van Uw bestuur van de onderwerpen der beide heden gehouden lezingen bijzonder gelukkig, omdat daaruit blijkt dat ook onder U dit besef van de noodzaak ener heroriëntering, en de bereidheid, daarmede een ernstig begin te maken, levend is.

Een dergelijke heroriëntering practisch uit te voeren zal geenszins een gemakkelijke taak zijn, vooral zolang er voor leraren nog geen „sabbatical year" is ingevoerd, waarmede ik bedoel dat leraren periodiek in staat gesteld zouden worden, met behoud van salaris een jaar lang aan een binnen- of buitenlandse universiteit te verblijven, deels om daar opnieuw colleges te volgen, maar vooral ook om daar wetenschappelijk werk te verrichten, en daardoor in contact te blijven met de levende wetenschap.

Ten slotte zij het mij toegestaan, enkele der punten aan te geven, die naar mijn overtuiging bij een dergelijke heroriëntering in de eerste plaats in aanmerking genomen moeten worden.

1. In de eerste plaats is nodig: een preciese en gedifferentieerde doelstelling van het wiskunde-onderwijs, en wel in operationeel

gedefinieerde termen, zodat bij iedere leerling *toetsbaar* is, of, resp. in hoeverre het gestelde doel bij hem bereikt is. De differentiatie dient daarin te bestaan, dat a) beheersing van bepaalde technisch-wiskundige vaardigheden, b) een juist „begrip" van bepaalde theoretische overwegingen, c) vindingrijkheid bij het overwinnen van nieuwe moeilijkheden *afzonderlijk* geleerd en *afzonderlijk* getoetst worden, instede van, zoals thans het geval is, in ieder vraagstuk opnieuw tot een dikke brij dooreengeklutst te worden. Daarbij dient bij het toetsen van technische vaardigheid vooraf een *begrensde* verlangde rekencapaciteit vastgesteld te worden, zodat iedere opgave, wat omvang en graad van complicatie betreft, aan zeer stricte grenzen gebonden is, terwijl voor het „foutloos rekenen" *vooraf* bepaalde tolerantiegrenzen vastgesteld worden. Hetzelfde dient, mutatis mutandis, met het toetsen van „begrip" en „vindingrijkheid" het geval te zijn.

2. De gedifferentieerde doelstelling dient in verband gebracht te worden met een differentiatie naar de persoonlijke capaciteiten, de persoonlijke belangstelling en de beroepskeuze van de leerling. Iemand, die een commerciële loopbaan kiest, naar een huishoudschool gaat of bij de politie komt, heeft m.i. geen enkel nut van wiskunde-onderwijs dat verder gaat dan het kunnen lezen van grafieken en statistieken. Iemand, die naar de universiteit gaat en enige aanleg en belangstelling voor wiskunde heeft, kan op bijna ieder gebied voordeel hebben van enige vaardigheid in het lezen van algebraische formules en enige kennis van statistische toetsingsmethoden. Iemand, die in technische richting gaat, of die belangstelling heeft voor radiotechniek, e.d., dient ruimer algebraisch-analytische kennis te hebben, die zich uitstrekt tot en met de vaardigheid, met goniometrische en exponentiële functies te werken (ook van een complex argument!), terwijl een technische vaardigheid in het differentiëren van zulke uitdrukkingen eveneens zéer gewenst is, zodat hij b.v. de oplossing van de differentiaalvergelijking van een eenvoudig circuit, b.v.

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = Ae^{i\omega t}$$

kan begrijpen. Voor iemand, ten slotte, die in wiskundige of verwante richting verder gaat, zal men bepaalde eisen aan „begrip" en „vindingrijkheid" wensen te stellen.

3. Deze differentiatie bij het onderwijs zou natuurlijk een zelfde differentiatie bij het eindexamen vereisen. (Dat men dit laatste ooit zou willen afschaffen durf ik niet te hopen.) Ik zou zeker niet willen

DIDACTISCHE REVUE

I*a*. *The Mathematics Teacher,*
Volume XLVII, number two, February 1954, Washington.

1. L. Emerson Boyer's artikel „*A new responsibility of teacher education programs*" wijst op de grote verscheidenheid van wiskunde-programma's op Amerikaanse scholen. Hij onderscheidt twee hoofdtypen: „the older traditional, sequential or specialized mathematics program and the new general, functional, or basic mathematics program." Het eerste komt ook voor onder de naam „college preparatory program". Sinds de leerplichtwetten vrijwel elk kind op de high school brachten, bleek de wiskunde meer en meer een moeilijk vak; „. . . there were so many „failures" in mathematics that educators were forced, by rather sound administrative principles, to declare mathematics an elective". En als zodanig werd het relatief door steeds minder leerlingen gekozen. De auteur is van oordeel, dat tot zekere hoogte „the study of mathematics has suffered because of a certain unwillingness on the part of mathematicians to reorganize the content and to teach the subject in such a way that its bearing on the problem of living would be more obvious". De auteur vraagt zich af, hoe in de behoefte aan leraren moet worden voorzien; hij schat het tekort op 50%. Welk onderwijs dienen de a.s. leraren te hebben, specialized or basic?
Hij beschouwt voor de high school het laatste didactisch moeilijker en sociaal belangrijker en geeft aan hoe de opleiding der leraren dient te worden geregeld.
H. T. Karnes antwoordt Boyer in „*Points and Viewpoints*". Voor de keuze staande tussen een „two-track teacher-training program" en een „one-track teacher-training program" kiest hij het laatste. Als niet elk leraar zó wordt opgeleid, dat hij beide soorten wiskunde-onderwijs kan geven, voorziet hij een afglijden van onderwijs naar lager niveau.

2. W. David Reeve schrijft over „*General mathematics in the secondary school*". Een uitvoerige historische en methodische be-

voorstellen, het Amerikaanse systeem over te nemen. Voor het systeem van uitsluitend „ja- of neen-vragen" of van het uitbesteden van eindexamens bij een commerciële instelling b.v. voel ik niets (al zou het eindexamen er zeker nauwelijks nòg slechter door kunnen worden!). Maar wel meen ik, dat een invoering in beperkte omvang van het Amerikaanse „credit"-systeem aanbeveling verdient. Dit houdt in, dat de abituriënt voor alle vakken tezamen een bepaald aantal eenheden als „credit" moet verwerven. Ieder onderdeel van de leerstof vertegenwoordigt een vooraf bepaald aantal eenheden, en de candidaat heeft binnen zekere grenzen de vrijheid, die eenheden willekeurig te kiezen. Voor ieder bepaald *gebruik* van het einddiploma kan dan het bezit van een bepaald aantal eenheden in een bepaald vak als eis gesteld worden. Voor zoverre de wiskunde betreft, zou men dus b.v. voor iedere universitaire studie 3 eenheden, voor de β-faculteiten, de M.T.S. en dergelijke 6 eenheden, en voor studie in de wis- of natuurkunde 9 eenheden kunnen eisen. Precisering van deze aantallen is natuurlijk een kwestie van latere overweging.

Dit alles eist ingrijpende wijzigingen, met betrekking tot onderwijs zowel als eindexamen. Hopelijk kunnen wij ermede bereiken, dat niet meer het onderwijs door het eindexamen, maar het eindexamen door het onderwijs beheerst wordt, en dat de eindexamenopgaven niet meer vastgesteld worden door anonyme adviseurs zonder openbare verantwoordelijkheid, waarvan men wel eens de indruk gaat krijgen, dat zij van de hedendaagse wiskunde en haar toepassingen niet méér gezien hebben dan wat op de middelbare school geleerd wordt dat wil zeggen: eigenlijk niets.

Samenvattende meen ik te mogen zeggen, dat wij mathematici er voor dienen te zorgen, dat op het massaproduct dat wij afleveren, de leerlingen, een behoorlijke kwaliteitscontrole kan worden toegepast, dat de resultaten die wij pretenderen te kunnen bereiken aan de eisen van toetsbaarheid worden onderworpen, die van iedere medicus of bioloog verlangd worden, dat wij ons van de beperkte betrouwbaarheid van onze toetsing rekenschap geven en bepaalde tolerantiegrenzen toelaten, maar ook dat wij weten hoe het evenwicht te bewaren tussen de „opbrengst", gedifferentieerd naar de verschillende behoeften, en de „kosten" in de vorm van onderwijs- en leer-uren, en dit te behandelen als een wiskundig decisie-probleem.

Het komt mij voor, dat dit voor ons, wiskundigen, een ereplicht is.

Ik heb gezegd.

schouwing over „*general mathematics*" wordt gegeven. De principes voor de inrichting van dit wiskunde-onderwijs worden uiteengezet.

3. Ph. S. Jones geeft een historische beschouwing over complexe getallen in „*an example of recurring themes in the development of mathematics*".

4. W. L. Schaaf geeft meer dan 8 kolommen titels voor „*the high school mathematics library*"; in aflevering 3 volgen nog 9 kolommen.

5. Voorts nog een aantal kleine artikelen (o.a. E. Lewis, „*The pupil discovers algebra*" en R. J. Oliver, „*Mathematics bulletin board displays*"), berichten over de jaarvergadering van de National Council of Mathematics en de „*Reviews and evaluations*".

I*b*. *The Mathematics Teacher*,
Volume XLVII, number three, March 1954, Washington.

1. Prof. B. Segre geeft een boeiend overzicht van de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in Italië in de laatste eeuw in: „*The teaching of mathematics in Italian Schools*".

Na vijf jaar lagere school doen de leerlingen een schriftelijk en mondeling examen voor de driejarige middelbare school (scuola media). „Those who do not enter the secondary school must attend either a training school for workers or an art school, which is likewise intended as a preparation for the professions". Na drie jaren volgt een vijfjarige middelbare school (Liceo, high or grammar school).

Het wiskunde-onderwijs op de driejarige school is intuïtief en op de praktijk gericht „without, however, excluding some considerations of a logico-deductive nature". De auteur vermeldt de gebruikelijke leerstof. Aan het eind van de drie jaren heeft een zogenaamd „esame di licenza" plaats, dat toegang geeft tot de vijfjarige school. „Here the mathematical instruction is designed to arrive at the logico-deductive method by successive stages, through an intuitive and dynamic process, in close contact with the historical development of the subject".

Ook het program voor deze school wordt geschetst.

De auteur geeft aan, welke geleidelijke achteruitgang het wiskunde-onderwijs in Italië in de loop van de laatste honderd jaar heeft getroffen. „The Casati Law [1859] brought the program of studies to a high level and created in all types of schools a tradition of solidity and seriousness". Het „scientific" type van vijfjarige middelbare school staat niet op het hoge peil van het onderwijs op

de „classical high school". „In particular, in no branch of our secondary and high schools does mathematics teaching occupy the pre-eminent position to which its formative value and the importance of its many applications entitle it". Het aantal beschikbare uren is geleidelijk aan afgenomen. De late specialisatie (abiturienten van de classical high school mogen in alle faculteiten doorstuderen) geeft bezwaren. „There is a large and growing number of young men who pursue scientific study at the university without the necessary disposition for them".

De auteur hoopt, dat de reorganisatieplannen (die o.m. voor de leraren in de wiskunde en voor die in de natuurkunde gescheiden opleiding beogen) de zo nodige verbeteringen zullen brengen.

2. W. D. Reeve bespreekt in zijn vervolgartikel *„General mathematics in the secondary school"* de plaats van dit vak in de junior high school, in the senior high school and in the junior college. De auteur ziet als doel van general mathematcis „to obtain a vital, modern, scholarly course in introductory mathematics that may serve to give such careful training in quantitative thinking and expression as well-informed citizens of a democracy should express".

3. H. C. Trimble behandelt *„the arithmetic of growth"*, hij geeft een reeks voorbeelden, die de vorming van het begrip „verhouding" kunnen voorbereiden. „The author believes that the time has come to try to build the concept of ratio by providing guided experiences prior to abstract definitions".

4. In *„Devices for the mathematics classroom"* beschrijft F. Ek *„a simple multiple purpose dynamic device"* (drie latjes, waarvan het eerste met het tweede en het tweede met het derde scharnierend zijn verbonden). K. Walters geeft een recept voor *„Blackboard compasses that every student can afford„"* E. J. Berger maakt een model van *„a tetrahedron with planes bisecting three dihedral angles"*.

A. Struyk schrijft in *„Mathematical miscellaned"* over *„Theme paper, a ruler, and the central conics"*.

Ph. S. Jones in *„Historically speaking"* over grote getallen in Romeinse cijfers geschreven en over de etymologie van wiskundige begrippen.

4. Twee dissertaties worden besproken in de afdeling *„Research in mathematics education"* (1) A. V. Kozak, *Kalgometrics,* (2) W. L. Carter, *A new basis of organization for the junior high-school mathematics program.* Het tweede werk houdt zich bezig met het probleem: „How can problem-solving be taught in junior high-school mathematics?"

5. In *„Tips for beginners"* bespreekt F. G. Lankford de vraag

„What are your pupils learning? Some suggestions on evaluation".
T. H. Tagerstrom geeft een 25-tal vragen uit de *„Fourth annual mathematical contest sponsored by Metropolitan New York Section of the Mathematical Association of America".*
Bij elke vraag mag de candidaat uit 5 gegeven antwoorden kiezen.
6. Verder: *Verenigingsnieuws, reviews, evaluations.*

II*a*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht;*
6. Band, 7. Heft, Februar 1954; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

1. Prof. dr R. W. Pohl geeft in *„Humanismus und Naturwissenschaften"* een verslag van een toespraak tot de leerlingen die in 1953 het Johanneum te Hamburg verlieten. We citeren:
„Die dritte Gymnasialsprache, die Mathematik – heute die Sprache der Naturwissenschaften und der Technik – kann in ihrer Bedeutung kaum überschätzt werden. Sie ist völlig international. Sie kennt keine Ausnahmen. In mathematischer Sprache kann man nicht schwätzen. In der Mathematik gibt es keine Phrasen. Jeder von uns sieht täglich schaudernd, welches Unheil mit Phrasen angerichtet wird. Die Anzahl der Menschen, die durch Phrasen berauscht werden, ist viel gröszer als die Zahl derer, die dem Alkohol unterliegen. Die mathematische Sprache ist ein besonders wertvolles Erziehungsmittel unter denen, die wer der Antike verdanken . . ."
2. E. Lampe bespreekt in *„Der Katalysator in der Mathematik"* enige bekende problemen uit de „Unterhaltungsmathematik". Allereerst het vraagstuk van de verdeling van een erfenis van 23 kamelen onder vier erven in de verhouding $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{12}$. Hij laat zien, dat de verdeling „mit Hilfe des geborgten Kamels" en die „ohne Borg" tot dezelfde uitkomst leiden, als men in het laatste geval de verdeling der resten maar ad.inf. voortzet, telkens in de door de erflater gewenste verhouding. Voorts veralgemeent hij het probleem. Een tweede opgave (over de „sigarettenpeukjes" rokende roker) wordt op analoge wijze behandeld.
3. A. Frey bespreekt in het artikel *„Über die Formgleichheit der Exponentialkurven"* de gelijkvormigheid van de grafieken van de functies: $y = a^x$ en $y = b^x$ $(1 < a < b)$. Ga uit van de eerste grafiek. Neem alle coördinaten k maal zo klein. We krijgen: $y = \frac{1}{k}(a^k)^x$. Stel $a^k = b$ dan wordt $y = b^{x - {}^b\log k}$. Door een passende verschuiving van het assenstelsel in de richting van de negatieve x-as krijgen we als vergelijking van de kromme $y = b^x$.
4. Dr K. Engel, *„Über eine Erweiterung der Leibnizschen Regel".*

5. Prof. dr C. Thaer bespreekt in „*Zum Petersburger Problem*" een bekend vraagstuk van de gebr. Bernoulli uit de kansrekening.

6. Dr. M. Kolscher, „*Die Potenzsummen der natürlichen Zahlen*".

7. Prof. W. Kluge, „*Neue konstruktive Bestimmungen der Kegelschnitte*".

8. Prof. O. Botsch, „*Zur Darstellung der Pythagoreischen Zahlen*".

Voorts bevat de aflevering enige artikelen van natuurwetenschappelijke aard, Opgaven en Oplossingen, en een „Bücher- und Zeitschriftenschau". De Tagungsberichte getuigen van een buitengewoon levendig verenigingsleven; het program van de jaarvergadering, die de „Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts" in April 1954 te München houdt, is rijk en aantrekkelijk.

II*b*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 6. Band, 8. Heft, März 1954; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

1. Aan het artikel „*Die Physik im Berufsschulunterricht*" van W. Pohl is toegevoegd een „Entwurf eines Rahmen-Stoffplanes für Fachphysik an Metallklassen", waarin de leerstof voor 120 lessen, over drie jaren te verdelen, van les tot les gespecificeerd, is aangegeven; 15 lessen ervan zijn aan „Mechanik" gewijd.

2. R. Krämer zegt in „Zur Didaktik der Infinitesimalrechnung" o.a.: „Der Grenzwert und die Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten sind der Schlüssel zum Verständnis der Differential- und Integralrechnung". Het zou onjuist zijn deze leerstof van het program der middelbare scholen af te voeren en ze eerst te behandelen, zodra de stof „in voller akademischer Schärfe" gegeven zou kunnen worden. „Es gehörte dazu eine viel gröszere Reife, als sie sogar der Durchschnittsstudent der Mathematik in den ersten Semestern erreicht".

De auteur geeft uitvoerig aan, hoe hij het limietbegrip voorbereidt en bijbrengt. De eigenschappen der limieten moeten worden bewezen. Eerst daarna volgt b.v. de formule voor de som van een convergente meetkundige reeks! En vervolgens de differentiaal- en integraalrekening.

Het differentiaalquotiënt is slechts een afzonderlijke notatie voor een dikwijls optredende limiet, waarvan de benaderende waarden de vorm van differentiequotiënten hebben, die op grond van de

gegeven functies zich betrekkelijk gemakkelijk laten berekenen. De integraal treedt op als limiet van de som van een reeks in- of omgeschreven rechthoeken.
De auteur behandelt de afgeleide functies van de gehele rationale veeltermen, van sin x, cos x, a^x en log x, maar laat een deel van de bewijzen weg, b.v. het algemene bewijs voor de afgeleide functie van x^n.
Van de verdere bijdragen op wiskundig gebied noemen we:
I. Paasche, „*Über die Cauchysche Mittelwertefunktion (Potenzmittel)*";
J. E. Hofmann, „*Zur elementaren Berechnung von zyklometrischen Funktionen und Logarithmen*";
C. Schmidt, „*Proportionalität der oberen Höhenabschnitte eines Dreiecks mit den Kosinus der Winkel*";
Th. Morschheuser, „*Zur Etymologie des Wortes „Ellipse*".

III. *The Mathematical Gazette,*
Vol XXXVIII, No. 323, Febr. 1954; edited by Broadbent, London.

1. De aflevering vangt aan met een „*Report of the Council for the Year 1953*", waaruit de bloei van de Mathematical Association (2503 leden; uitgaven £ 4 189) en de veelzijdige activiteit blijken
2. Opgenomen is een verslag van een rede, die wijlen prof. E. A. Milne op 2 September 1939 zou hebben gehouden. Onderwerp: „*The teaching of mechanics in school and university*". De auteur verklaart o.m.:

„The study of mechanics and the solution of problems in mechanics are an intrinsic part of the subject of mathematics as taught in Britisch schools and universities; the subject is associated with such names as those of Routh, Lamb, Loney, Love. It is perhaps a peculiarly British tradition, well worth preserving as a discipline of the first order, comparable with Latin and Euclidean geometry". De auteur beschouwt afzonderlijk: (*a*) de mechanica op de middelbare scholen; (*b*) de mechanica op de universiteit; (*c*) de mechanica in het wetenschappelijk onderzoek.

Ten aanzien van de schoolmechanica haalt hij eigen herinneringen op. Hij waardeert zijn leermeesters die hem de wiskundige zijde der mechanica bijbrachten en hen die hem experimenteel vormden, maar verklaart, dat „these experiments added not one whit to my understanding of the principles of mechanics, or to my power of solving problems in mechanics. As to my belief in the validity of the principles of mechanics, it was rather impaired than streng-

thened by these experiments, for the experimental errors were usually distressingly large...... One does not get a grasp of the principles of mechanics by thinking about them, however intensely; one does not get a grasp of the principles of mechanics by performing mechanical experiments- one merely acquires the outlook of an engineer, a man for whose profession I have an almost envious admiration, but whose profession is not the principles of mechanics. One gets a grasp of the principles of mechanics by carrying out the solution of mathematical problems in mechanics....."

De auteur gaat na welke mechanica-stof voor elk der drie bovengegenoemde stadia (*a*), (*b*), (*c*) in aanmerking komt.

3. C. Gattegno schrijft een vervolgartikel over „*Mathematics and the Child*". Ditmaal bespreekt hij "*The Use of Mistakes in the Teaching of Mathematics*". Hij neemt onder meer een paar lijsten van veel voorkomende leerlingenfouten op het gebied van de algebra en uit dat van de meetkunde. Hij is van oordeel, dat deze fouten ons kunnen helpen het kinderlijk denken beter te begrijpen. De leraar behoort mede van de fouten van de leerlingen te leren, hoe hij hen de wiskunde zal hebben te leren. Over de algebrafouten merkt hij op:

„Here again the remedy is understanding, not repetition and drill, and the role of the teacher is again that of discovering the mental structure that intervenes in the algebraic thinking required".

Verdere artikelen:

A. G. D. Watson, „*The Sturmian Theory of Oscillations*".

E. D. Camier, „*Some Theorems on Conics*".

M. P. Drazin, „*The invariant Circles of a bilinear Transformation*".

V. D. Naylor, „*The Stream Function and the Velocity Potential Function*".

Er zijn 12 blz. „*Mathematical Notes*" en 34 bladzijden „*Reviews*". Deze zijn rijk geschakeerd. Uitvoerig besproken worden o.a. de volgende Nederlandse uitgaven:

A. A. Fraenkel, Abstract Set Theory;
P. Wijdenes, Noordhoff's Wiskundige Tafels in 5 Decimalen;
I. M. Bochenski, Ancient formal logic;
A. Mostowski, Sentences undecidable in formalised arithmetic;
S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics.

IV*a*. *School Science and Mathematics,*
Volume LIV, Number 1, Whole 471, January 1954; Oak Park, Illinois.

1. R. Jurgensen bespreekt in „*All parabola's are similar*", misverstanden van leerlingen ten aanzien van deze gelijkvormigheid.

2. W. R. Utz's artikel over „*Algebra in the training of teachers*" doet uitkomen, dat de Amerikaanse leraar dikwijls maar weinig ver boven de door hem onderwezen leerstof staat. De waarde van de studie der differentiaal- en integraalrekening wordt voor een deel der leraren betwijfeld. „For the secondary schoolteacher whose teaching is in algebra, geometry and trigonometry, it is debatable as to whether the analytics and calculus should not be replaced, in part at least, bij courses more closely related to the subjects which will eventually be taught". De auteur maakt gewag van een algebra-cursus door hem aan de Virginia-university gegeven aan leraren die naar de Universiteit terugkeren om hun studie voort te zetten.

3. In een artikel getiteld „*Fifth grade children discover fractions*" geeft V. Mulholland aan hoe het begrip breuk met concrete leermiddelen aan 10—12 jarigen kan worden geleerd.

Het artikel is geschreven in de vorm van een klassegesprek van 15 bladzijden. De schr. zegt er zelf van: „The following is the account of how one class, through the use of concrete materials, manage to formulate its own rules for working with fractions".

4. W. P. Gleason beschrijft in „*Real Astronomy*" een vijftal eenvoudige instrumenten, waarmee de leerlingen zelf sterrekundige waarnemingen kunnen doen.

5. Het artikel van J. S. Miller over de vraag: „*What is the weight of a body?*" komt hierop neer, dat uitgelegd wordt dat in de formule $\bar{K} = \bar{G} + \bar{K}_c$ door deze drie vectoren opvolgend worden aangeduid (1) de aantrekkingskracht die een lichaam van de aarde ondervindt, (2) het gewicht van dit lichaam en (3) de centripetale kracht nodig voor de dagelijkse cirkelbeweging.

6. C. H. Denbow schrijft over „*The use of variators in the teaching of algebra*". — „The writer has used some of the relationships between mathematics and machinery in developing a set of devices, called variators, whose purpose is to help pupils to see and understand algebraic concepts and processes".

7. Verder is er het „*Problem Department*" en zijn er de „*Book Reviews*".

IV*b*. *School Science and Mathematics*,
Volume LIV, Number 2, Whole 472; February 1954; Oak Park, Illinois.

Het belangrijkste artikel voor wiskunde-docenten uit dit nummer is het „*Final Report to the Central Association of Science and Mathematics Teachers of its Committee on the significance of mathematics and science in education*". Het comité werd in 1950 geïnstalleerd met de opdracht „to study ways and means of bringing to the attention of the community the importance of the place of science and mathematics in education" en bracht het rapport in November 1953 uit.

Achtereenvolgens stelt men zich tot taak:

(*a*) te onderzoeken, of de beweerde achteruitgang in de deelname aan het onderwijs in de wis- en natuurkundige vakken in overeenstemming is met de feiten;

(*b*) voor het geval er inderdaad van achteruitgang sprake is, voor zover mogelijk de oorzaken van deze achteruitgang op te sporen;

(*c*) voor zover er oorzaken aanwijsbaar zijn, maatregelen voor te stellen om de achteruitgang te doen plaats maken voor een vooruitgang.

Wat punt (*a*) betreft, voor biologie blijkt er een aanmerkelijke vooruitgang aan te wijzen (procentsgewijs in de periode 1920—1950 meer dan verdubbeling); voor scheikunde is de deelname vrijwel constant, maar voor natuurkunde en wiskunde is er continue achteruitgang. Alleen de trigonometrie maakt een uitzondering: hier stijgt het aantal inschrijvingen niet slechts absoluut (dat is ook het geval voor de andere vakken), maar zelfs relatief.

Wat (*b*) betreft: „it is possible that drops in enrollments at the high-school level in certain higher courses in mathematics and science may be due partly to the fact that educators have overlooked the necessity for stimulating interest in these subjects and motivating students in these areas. Apparently the intrinsic value of the courses is not sufficient to motivate the students to elect them". Er wordt uitdrukkelijk op gewezen, dat vele science teachers de noodzakelijke bekwaamheden voor hun ambt missen en daardoor de leerlingen vermoedelijk niet tot de keuze van hun vak kunnen inspireren. „It may also be reasonable to infer that teachers of mathematics and/or science have not been so insistent in their demands for raising graduation requirements in these fields as teachers in other subject-matter areas".

Het rapport doet ten slotte een aantal voorstellen aan de hand ter verbetering van de bestaande toestand.

School Science and Mathematics,
Volume LIV, number 3, Whole 473, March 1954. Oak Park, Illinois.

1. Opgenomen is het verslag van een rede op een „Industry-Education Conference" in 1953 van H. F. Fehr: „*Mathematics Instruction and Scientific Manpower*".

De auteur constateert: „The shortage of manpower, adequately trained in mathematics both at the creative and at the technician level, is due in large extent to the recent demand by industry, government, and research for this type of personnel. It is also due to a number of significant factors that have occurred in education . . .". Er is een beangstigend tekort aan bevoegde leraren. Er is gebrek aan begrip bij schoolleiders, voor welke studierichtingen een wiskundige opleiding onontbeerlijk is. De school ontdekt de bekwame leerlingen niet tijdig genoeg en leidt hun studie niet op voldoend efficiënte wijze. De leraar is vaak te eenzijdig opgeleid; te zelden is een behoorlijk niveau ten aanzien van zowel natuurkunde als wiskunde bereikt. Er is te dikwijls dressuur: „drill of meaningless processes". "Concept learning and problemsolving techniques are newer practices in education, and how to teach so that these qualities are acquired is unknown to many teachers".

2. R. J. Cooke bespreekt het rekenonderwijs op de lagere school in: „*Helping children build a positive attitude toward arithmetic through its mathematical concepts*". Hij acht niet moeilijkheid van de leerstof maar verkeerde leermethoden van de kinderen en verkeerde onderwijsmethoden van de onderwijzer de oorzaak van veel mislukking.

3. K. Walters leidt op eenvoudige wijze af, hoeveel energie er bij een niet volkomen veerkrachtige botsing verloren gaat.

4. In Amerika worden vele radio-uitzendingen van 15 minuten gegeven over wiskundige onderwerpen. Voor een luttel bedrag kan men nu de uitgezonden lezingen op de band laten vastleggen: een halve dollar voor een speech van 15 minuten.

5. J. V. Buck bespreekt: „*The general approach versus the specialized approach in the teaching of junior-high school science and mathematics*".

6. Wat is „Bingo"? Sinkhorn en Read introduceren „*Mathematical Bingo*". Ze geven als voorbeeld een lijst van 75 vragen, die bij het spel alle in hoogstens 15 sec. per stuk opgelost moeten zijn. Ter navolging!

7. R. C. Yates behandelt: „*Solving symmetric equations*".

8. „*Problem Department*" en „*Book Reviews*".

V. *Elemente der Mathematik;*
Band IX, nr. 2; Maart 1954; Verlag Birkhäuser, Basel.

Ter gelegenheid van de 60ste verjaardag van Paul Finsler schrijft L. Locher-Ernst een artikel „*Entdecken oder Erfinden?*" Finsler's standpunt t.a.v. het formalisme wordt aangegeven door de zin "Es geht in der Mathematik um das Entdecken; zu diesem Ziele können Formalismen erfunden werden, die dem Entdecken dienlich sind".

Van P. Finsler zelf wordt opgenomen een verslag van een lezing (1953, Basel) over „die Unendlichkeit der Zahlenreihe".

Anne Finsler geeft eenvoudige bewijzen voor de stelling dat de inhoud en de oppervlakte van een „Kreuzkern" opvolgend twee derden zijn van inhoud en oppervlakte van de omgeschreven kubus.

Voorts: *Aufgaben* en *Literaturüberschau.*

VI*a*. *Paedagogische Studiën,*
31e jrg, 2de aflevering, Februari 1954; J. B. Wolters, Groningen.

1. Prof. Dr H. Nieuwenhuis schrijft een oriënterend artikel over „*het Paedagogisch Centrum der Gemeente 's-Gravenhage*", waarin hij de doeleinden (functioneren als informatiecentrum, bevorderen van de onderwijsvernieuwing, verrichten van researchwerk) uitvoerig belicht en de organisatievorm, die vruchtbare samenwerking tussen openbaar en bijzonder onderwijs mogelijk maakt, toelicht.

2. Dr P. Neureiter, associate-professor aan een Teacher college te New York, en Fullbright-teacher te Amsterdam in de cursus 1952—1953 geeft *een oordeel over het onderwijs in de U.S.A. en in Nederland.* Hij acht het feit, dat hij in een Nederlandse school in de hoogste klas een les over Natuurkunde of algebra kan geven, die de leerlingen in het Engels kunnen volgen en blijkens de proefwerken, voldoende hebben opgenomen, voor deze scholen „een prestatie zonder weerga".

3. H. Voskuyl tekent protest aan tegen de beschouwingen van P. Post over *het tekenen op scholen voor V.H.M.O.*

VI*b*. *Paedagogische Studiën,*
31e jaargang, 3e aflevering, Maart 1954; J. B. Wolters, Groningen.

In zijn artikel „*Cijfers op de Middelbare School*" publiceert dr J. N. van den Ende een rapport over een in 1948 verricht onderzoek inzake de schoolcijfers en de ermee samenhangende consequen-

ties ten aanzien van de bevordering. De resultaten van dat onderzoek zijn grondslag geworden van de reorganisatie van de Thorbecke-H.B.S. te 's-Gravenhage en verdienen in ruimere kring belangstelling.

De auteur heeft zich bezig gehouden met de volgende vragen:

a. Zijn er verschillen in cijfergeving bij verschillende scholen?

b. Zijn er verschillen in de cijfers, die behaald worden in diverse klassen?

c. Zijn er karakteristieke verschillen tussen de cijfers voor de verschillende vakken?

d. Zijn er karakteristieke typen van cijfergevers te vinden bij het vergelijken van de diverse leraren?

Onderzocht zijn ruim 26000 cijfers van ruim 2000 leerlingen van 6 scholen (89 klassen; 150 leraren).

Het verrichte onderzoek bevestigt o.a. het vermoeden dat de cijfercurven van de klassen 2 tot en met 5 elkaar zo opvallend dekken, dat de onderstelling dat de school zelf in staat zou blijken de correctie op de selectie die voor het toelatingsexamen wordt beoogd, effectief te verrichten, moet worden prijsgegeven.

De auteur verwerpt het invoeren van „vaste normen" om uit de impasse te geraken. De enige consequentie, die naar zijn mening uit de cijfers in verband met het zittenblijven te trekken zou zijn, luidt: „Als men het zittenblijven wil bestrijden, moet men het afschaffen en het aandurven bij enige bevorderingen geen doublures toe te laten".

De uitvoering van een dergelijke ingrijpende verandering in het traditionele systeem zal in aflevering 4 worden besproken.

VI*c.* *Paedagogische Studiën,*

31e jaargang, 4e aflevering, April 1954; J. B. Wolters, Groningen.

Prof. dr M. J. Langeveld heeft gecontroleerd, dat er op het gebied van de ontwikkelingspsychologie een begripsvertroebeling bestaat, die enerzijds aan de betrekkelijke jeugd van het vak, anderzijds aan de wetenschappelijke herkomst van zijn beoefenaars te wijten is.

Hij bespreekt in zijn artikel „*Enkele grondbegrippen der ontwikkelingspsychologie*" i.h.b. de begrippen biologische ontwikkeling, funktioneel leren, ontwikkeling op grond van kultureel gegeven vormsystemen, en systeemvrije, personele ontwikkeling.

Dr J. N. van den Ende besluit zijn beschouwingen over „*Cijfers op de Middelbare School*". Hij behandelt opvolgend de verschillende

schoolvakken en de leraar. We wijzen op een enkel punt uit de interessante beschouwingen. De cijfercurve voor frans vertoont in de eerste klas een twee-toppigheid, die de curven voor de andere talen en ook die voor meetkunde niet bezitten. De auteur concludeert o.a.: „. . . dat bij het Frans te hard van stapel wordt gelopen, althans voor een deel van de klasse. Het begin is niet voldoende afgestemd op het kind, dat niets van deze taal weet". „Het ware misschien wel beter geweest als de lagere school het schrappen van het Frans even volledig had aanvaard als de nieuwe spelling". „Het is wel opvallend, dat hier [bij de meetkunde] aan de onvoldoendenkant géén tweede maximum optreedt. Dit betekent, dat hier niet een belangrijke groep kinderen is, voor wie het vak te zwaar blijkt". Voorts wijs ik op de belangrijke voetnoot bij het laatste citaat: „Prof. Waterink concludeerde uit zijn onderzoek, dat voor verscheidene kinderen de drempelleeftijd voor het kunnen leren van Meetkunde bij ± 13 jaar ligt. Dit blijkt niet uit deze curve".

In zijn slotbeschouwingen gaat de auteur o.m. in op onze cijfergeving in de school van 1 tot 10, en valt daarbij in het bijzonder de positie van het cijfer 5 aan. Hij bepleit een schaal, waarin 3 onvoldoende, 4 bijna voldoende, 5 even voldoende, 6 voldoende betekent.

ENKELE OPMERKINGEN OVER HET BEGRIP MASSA

door

J. MUILWIJK.

1. Bij alle verschil in opvattingen over de Mechanica is er toch één ding, waar iedereen het over eens is: de betekenis van Newton voor de klassieke behandelingswijze van dit vak. Vandaar dat ik wil beginnen met de *wet van de traagheid* (in de formulering van Sommerfeld) weer te geven: De impuls van een vrij bewegend stoffelijk punt is constant naar richting en grootte [1]).

Hiertoe moet de impuls eerst gedefinieerd worden; Newton verstaat hieronder het product van de snelheid en de „hoeveelheid stof". Voor het laatstgenoemde begrip voert hij het woord „massa" in, met als definitie: het product van dichtheid en volume.

Sommerfeld merkt hier op, dat er zo geen bevredigende omschrijving van de massa gegeven wordt; men kan dichtheid immers alleen als quotiënt van massa en volume definiëren.

Misschien is men door deze omstandigheid wat huiverig geworden voor de uitdrukking „hoeveelheid stof"; in geen van de mij bekende schoolboeken over Natuurkunde of Mechanica komt deze term voor. Dientengevolge blijft het begrip massa *onnodig* abstract voor de leerlingen [2]).

2. Dat het ook anders kan, blijkt uit een boekje van prof. Sizoo [3]), waaruit ik het volgende citeer:

„In het dagelijks leven drukt men de *hoeveelheid van een stof* nu eens uit door het volume, dan weer door het gewicht." Deze zijn echter veranderlijk; wel krijgt men een constante grootheid, als men het gewicht deelt door de versnelling van de zwaartekracht.

---

[1]) Arnold Sommerfeld, Mechanik, Leipzig 1943, blz. 2 v.v.

[2]) Alleen A. M. P. Rocholl zegt in par. 12 van zijn Hoofdzaken der Natuurkunde, deel 3 A (Zutphen 1952): De massa van een lichaam is *evenredig* met de hoeveelheid stof, waaruit het lichaam bestaat.

[3]) G. J. Sizoo, Atoomenergie, Amsterdam 1946, hfdst. I, par. 1 (cursivering van mij).

„Het is deze grootheid, welke men in de Natuurkunde de massa noemt, en die men daar *beschouwt als de passende maat voor de hoeveelheid materie.*"

Wegens $a = K : m$ kan men ook zeggen dat de massa een maat is voor de traagheid.

„Toen de Natuurkunde, geleidelijk aan, geleerd had dit begrip massa scherp te formuleren, gaf zij aan de eeuwenoude *idee* van de onveranderlijkheid van de hoeveelheid der materie *uitdrukking* in het principe van het behoud der massa."

3. Met deze laatste opmerking naderen wij de grens, die de klassieke Mechanica van de moderne Natuurkunde scheidt. Alvorens echter dit laatste, fascinerende gebied te betreden, moeten wij er ons van overtuigen dat wij geen delen van ons Moederland verwaarloosd hebben.

Is het niet zo, kan men mij tegenwerpen, dat de gangbare behandeling — met name in *school*boeken — abstract *moet* zijn, op straffe van vaagheid in de begrippen? In de analytische Mechanica voert men de wetten van de beweging *axiomatisch* in, zij het als samenvatting en verscherping van de *ervaring*. Daarmee is een mathematisch, abstract model gegeven. Het is volstrekt niet nodig om de objecten *zelf* te definiëren; door de *relaties* ertussen vast te leggen kan men formeel de theorie opbouwen.

Deze gedachtengang is mathematisch onberispelijk; ik stel daar echter tegenover dat men onderscheid moet maken tussen de logisch-formele samenhang en de *intuïtieve achtergrond*.

Hoewel de meetkundige geen behoefte heeft aan een *definitie* zoals „Een punt is wat geen delen heeft" (Euclides), zal hij toch de hierdoor opgewekte suggestie niet willen missen, vooral niet bij het onderwijs. Analoog is de situatie, als men het begrip „waarschijnlijkheid" wil definiëren; men kan, om de grote daarmee verbonden philosophische moeilijkheden te vermijden, het kansbegrip uitschakelen, maar dit is zozeer in ons denken geworteld, dat zonder een beroep op een dergelijk intuïtief begrip de opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening weinig overtuigend is [1]).

In de Mechanica is het evenzo gesteld. Sommerfeld geeft dan ook voor het begrip kracht allereerst enkele oriënterende omschrijvingen: qualitatief geeft de spier-sensatie al een idee daarvan, en quantitatief hebben we de zwaartekracht ter beschikking. Hierbij zou ik nog de veerbalans willen noemen, die een invariante maatstaf levert.

---

[1]) W. Feller, An Introd. to Probab. Theory and its Applic. I; New York (1952).

Voor massa noemt Sommerfeld als synoniem hoeveelheid stof; de exacte definitie ervan wordt impliciet gegeven door

$$\frac{dp}{dt} = K,$$

waarin $p = mv$ de impuls voorstelt [1]).

4. Bij de formele invoering van het begrip massa ontbreekt in bijna ieder mij bekend leerboek de *constatering* van het *additieve* karakter daarvan [2]). Impliciet is deze eigenschap natuurlijk wel aanwezig: de practijk van het wegen heeft als stilzwijgende veronderstelling, dat men gewichten mag optellen [3]), en de massa's zijn daarmee evenredig.

Dat men grootheden mag optellen, die slechts een kortere notatie betekenen voor $K : a$, is niet evident; dat men door samenvoeging van twee *hoeveelheden* stof de *som* van die hoeveelheden krijgt, uiteraard wel. Men ziet hoezeer een beroep op de intuïtieve achtergrond de aansluiting tussen het model en de physische realiteit ten goede komt.

5. Laten we thans het grensgebied tussen klassieke en moderne Mechanica betreden. Bij snelle electronen blijkt de verhoudingsfactor $K : a$ niet meer constant te zijn:

$$\frac{K}{a} = m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

waarin $\beta = v : c$ (c = lichtsnelheid).

Nu mag men het intuïtieve begrip massa alleen met m_0 in verband brengen. Niettemin is er een interpretatie mogelijk, die de toename $m - m_0$ van de traagheid toeschrijft aan iets, dat ook vrij aanschouwelijk is, n.l. de kinetische energie E. Volgens Einstein beantwoordt hieraan een bedrag $E : c^2$ aan trage masse. Men heeft immers in eerste benadering:

---

[1]) Bij constante massa wordt het linkerlid $m \frac{dv}{dt} = ma$; bij niet-constante massa blijft de bovenstaande formule geldig (blz. 30).

[2]) Newton vermeldt bij de definitie van *impuls*, dat men de impulsen der delen van een lichaam mag optellen, speciaal als de snelheden gelijk zijn. Bij zijn toelichting op de definitie van massa is de additiviteit klaarblijkelijk verondersteld. Zie H. J. E. Beth, Newton's „Principia" I, Groningen-Batavia 1932, blz. 22—24. Slechts J. H. Schogt (Beginselen der Theoretische Mechanica I, Groningen 1926, par. 84) definieert de massa van een stelsel stoffelijke punten als de som van de massa's.

[3]) Het sommeren van krachten bij gelijke richting, een bijzonder geval van het parallelogram, wordt in vele Mechanicaboeken later behandeld. Sommerfeld geeft het parallelogram van krachten als axioma (blz. 6).

$m - m_0 = m_0\{(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\} \approx m_0\,(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 - 1) = \tfrac{1}{2}m_0v^2 : c^2$ [1]).

6. Inplaats van de wetten van behoud van massa en van behoud van energie kan men één algemene wet stellen, die zegt dat de som van de (rust)massa m_0 en de energie constant is (mits men de eenheden omrekent met behulp van $E = mc^2$). Deze wet kan men zich concreet voorstellen, wanneer men denkt aan de paarvorming van een positief en een negatief electron doordat een atoomkern γ-straling absorbeert; hierbij gaat energie over in massa. Ook het omgekeerde proces treedt op: de z.g. annihilatie van twee tegengesteld geladen electronen. Het woord massa is hier klaarblijkelijk synoniem met stof; onder bijzondere omstandigheden kan stof „verdampen" tot energie, resp. arbeidsvermogen zich verdichten tot materie [2]).

7. Er is nog een andere analogie tussen massa en energie. Daar het licht een druk uitoefent kan men het als een gas van fotonen (lichtquanten) opvatten, waarbij elk foton een energie E en een impuls p bezit. Deze zijn even reëel als bij een electron.

Een rustmassa heeft zo'n foton niet; dit zou in verband met de eerste formule uit (5), daar $\beta = 1$, tot $m = \infty$ leiden. Nu is zijn energie $= h\nu$ (h = constante van Planck, ν = frequentie), terwijl zijn impuls $= \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ (λ = golflengte). Omgekeerd moet nu ook een electron, op grond van zijn impuls, een golflengte bezitten. Aan deze merkwaardige hypothese van De Broglie zijn we door het bestaan en de successen van de electronenmicroscoop overigens wel gewend geraakt [3]).

8. Wanneer we uit dit Electronen-wonderland terugkeren tot onze dagelijkse plichten in de Euclidische ruimte, waar nog altijd de klassieke wetten gelden, kan het zijn dat men ons tegemoet treedt

---

[1]) In de relativiteitstheorie is de kinetische energie $= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, wat exact gelijk is aan $c^2(m - m_0)$. Bij $v = 180.000$ km/sec $= 0{,}6c$ is $m = 1\tfrac{1}{4}m_0$. Een eerste benadering geeft dan $1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 = 1{,}18$.

[2]) Bij de splijting van 1100 gram Uranium wordt 1 gram in energie omgezet; $m = 1$, $c = 3.10^{10}$, $E = 9.10^{20}$ erg = 25 millioen kWh.

[3]) Kent men aan een lichtquant formeel een (bewegende) massa m toe, dan moet $p = mc = E : c$ zijn, indien men $E = mc^2$ stelt. Verder is $c = \nu\lambda$.

Bij een electron geldt nu ook $mv = p = h : \lambda$, waaruit volgt $\lambda = \frac{h}{mv}$ cm. Is U het aantal Volts van het potentiaalverschil, dat het electron moet doorlopen om de snelheid v te krijgen, dan geldt tevens: $\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}}$ Ångström.

met het bezwaar, dat de in (2) en (4) weergegeven gedachtengangen te moeilijk voor de leerlingen zouden zijn — een bezwaar, dat min of meer het tegengestelde is van dat uit (3).

Het meest terzake doende antwoord hierop bestaat in het schetsen van de manier, waarop een en ander in de klas behandeld kan worden.

Men begint daarbij op het niet constant zijn van het gewicht te wijzen; dit is dus geen goede maat voor de hoeveelheid stof. Wel blijkt de verhouding G : *g* of K : *a*, de massa, voor ieder lichaam een vaste waarde te bezitten.

De *eigenlijke inhoud* van het begrip massa is:

1e. Hoeveelheid stof;

2e. Traagheid.

Met deze omschrijving kan men de massa echter niet *meten*, zodat we als *definitie* kiezen $m = K : a$.

Proefondervindelijk blijkt, dat de massa verdubbeld is als men twee gelijke massa's samenvoegt. Onze definitie is dus in overeenstemming met het begrip hoeveelheid stof.

De bedoeling van het wegen is de bepaling van de hoeveelheid stof; het is dan ook de massa, die de voedingswaarde van levensmiddelen, de geneeskracht van medicijnen, de verbrandingswaarde van kolen enz. bepaalt. In de calorimetrie, bij de „gewichtsformule", in de Scheikunde gaat het au fond om de massa. Dat het niet altijd nodig is, dit er expliciet bij te zeggen, is te danken aan de omstandigheid, dat het aantal gramkrachten, waaraan het gewicht gelijk is, even groot is als het aantal grammassa's.

9. Wanneer het gelukt is, om de leerlingen de formule $K = ma$ te doen aanvaarden, komt het hachelijke onderwerp eenheden aan de beurt. De moeilijkheden zijn bekend: Moet het gewicht in grammen of in dynes uitgedrukt worden? Is het gewicht nu constant of niet? Wat is beter, een gewone balans of een veerbalans?

Men komt hier wel uit, als men principieel op het absolute standpunt gaat staan: Wie met niet-absolute eenheden werkt, *camoufleert* de veranderlijkheid van het gewicht — een vorm van valsheid in geschrifte.

Alles wat men met zorg opgekweekt heeft komt echter aan een tornado van misverstand bloot te staan, wanneer men de statische massa-eenheden gaat invoeren. Nu is de massa plotseling toch een functie van de plaats — pardon, dit geldt slechts voor de getalwaarde; de massa zelf is, tengevolge van de omgekeerde munt-

vervalsing, nog niet gedevalueerd. Wel is de getalwaarde van het gewicht constant, in twee stelsels. In het andere is het gewicht variabel . . . Laten we ons afwenden van dit toneel van verwarring en verschrikking.

10. Formeel is er tegen de invoering van een functie van de breedtegraad, die aan de relatie $m = K : a$ voldoet weinig te zeggen. „Doch ein Begriff musz beim Symbole sein". Weg daarom met de groot- en kleinstatische massa-eenheden.

Dwingt de practijk ons soms tot het aanvaarden van de statische stelsels *in hun geheel*? De electro-techniek in geen geval; die is meer gediend met het meter-kilogram-seconde-stelsel.

Stellig is de kg als krachtseenheid voor allerlei doeleinden onmisbaar. Zodra men echter met $K = ma$ wil werken, kan men òf de evenredigheid $K : G = a : g$ gebruiken, òf de kg-kracht in Newtons omrekenen (resp. de gramkracht in dynes).

Men *kan* voor potentiële energie of arbeid de statische eenheden gebruiken: G kg $\times$ h m $= Gh$ kgm. Natuurlijk presteren de beide dynamische stelsels hier evenveel. Bij de kinetische energie dient men echter een dynamisch stelsel te kiezen; ook bij de vorm mgh voor het A.v.P.

Heeft men de wet van behoud van mechanisch arbeidsvermogen of de wet van arbeid en kinetische energie nodig, dan kan men, als men niet in een absoluut stelsel wil werken, precies even snel de Joules in kgm omrekenen (resp. de ergs in gcm) als de kg in grootstatische massa-eenheden. Eén voorbeeld is hier voldoende:

Een stoffelijk punt van 2 kg wordt langs een vlak, dat een hoek van 30° met het horizontale vlak maakt, met een snelheid van 35 m/sec omhooggeschoten. Er werkt, behalve het gewicht, een constante kracht op het punt, die langs het hellend vlak omlaag gericht en 3 kg groot is. Hoe groot is de snelheid op het ogenblik, dat het stoffelijk punt 15 m heeft afgelegd? $g = 10$ m/sec^2.

1e oplossing [1]): De toename van de kinetische energie is

---

[1]) Volledigheidshalve vermeld ik hier nog de eenheden van het groot-dynamische stelsel:

Massa: 1 kg. Lengte: 1 m. Tijd: 1 sec. Hieruit worden afgeleid: Kracht: 1 N(ewton), deze geeft aan de massa van 1 kg de versnelling van 1 m/sec^2; 1 N $= 10^5$ dynes $= 1 : g(\approx 0{,}102)$ kgkr.

Arbeid : 1 J(oule), $=$ 1 N $\times$ 1 m $= 10^7$ erg $= 1 : g(\approx 0{,}102)$ kgm $= 1 : 36.10^5$ kWh.

Arbeidssnelheid: 1 W(att) $=$ 1 J/sec $=$ 1 V $\times$ 1 A.

Het mks-stelsel is nog beter voor de practijk geschikt dan het groot-statische, daar er een eenvoudig verband met de electrische eenheden is.

$\frac{1}{2} . 2 . x^2 - \frac{1}{2} . 2 . 35^2$ Joule, als men de eindsnelheid x m/sec stelt. Daar 1 kg = 10 Newton bedraagt de verrichte arbeid $-30 . 15 - 10 . 15 = -600$ J. Dus geldt

$$x^2 - 1225 = -600 \longrightarrow x = 25 \text{ m/sec.}$$

2e oplossing: De toename van de kinetische energie is

$$x^2 - 1225 \text{ J} = \frac{x^2 - 1225}{10} \text{ kgm; de verrichte arbeid is}$$

$$-3 . 15 - 1 . 15 = -60 \text{ kgm, enz.}$$

11. In het leerplan, dat als bijlage is toegevoegd aan het adres van Velines en Wimecos (Euclides, 28e Jaargang 1952/53 afl. III/IV) lezen we (blz. 127): „Eenheden: meter-kilogramkracht-seconde-*stelsel* (dus kennelijk met inbegrip van de g.s.m.e.); centimeter-grammassa-seconde-stelsel; meter-kilogrammassa-seconde-stelsel". Het accent is verlegd, want er zijn 2 absolute stelsels tegen 1 niet-absoluut. Maar de in (9) gesignaleerde moeilijkheden blijven. Het zou te betreuren zijn, als de H.B.S.-ers tot in lengte van dagen aan het risico bloot zouden staan, dat zij op hun eindexamen, evenals in 1944, een statische massa-eenheid dienden te kennen en te definiëren.

DE INVOERING VAN DE LOGARITHME.

Dr A. F. MONNA

§ 1. In een in dit tijdschrift onder de titel „Beschouwingen over de reële getallen" gepubliceerd artikel [1]) heb ik in het tweede gedeelte beschouwingen gewijd aan de wijze waarop door Bourbaki de logarithmische functie in de analyse wordt ingevoerd. Ik stel mij voor in dit artikel nog een andere methode om die functie in te voeren te behandelen. In verband met het karakter van dit tijdschrift moeten deze beschouwingen — evenals trouwens die in het vorige artikel — worden gezien als besprekingen van elementaire onderwerpen van een hoger standpunt uit (vergelijk de bekende boeken van Felix Klein). De inhoud van het vorige artikel onderstel ik bekend; ten aanzien van de notatie sluit ik mij daarbij aan.

§ 2. De te behandelen methode om de logarithmische functie in te voeren berust op een maatbegrip voor verzamelingen van locaal compacte topologische groepen. Een inleiding over deze begrippen gaat vooraf.

Een topologische ruimte (topologische groep) heet compact indien iedere oneindige verzameling in die ruimte tenminste één verdichtingspunt, behorende tot die ruimte, bezit.

Een dergelijke ruimte (groep) heet locaal compact indien ieder punt van die ruimte een compacte omgeving bezit.

Voorbeelden. De topologische groep R, gedefiniëerd in M1, is locaal compact, echter niet compact. Dat deze groep locaal compact is, is een gevolg van de stelling van Bolzano-Weierstrasz; de conditie in deze stelling dat de te beschouwen verzameling begrensd is correspondeert in de definitie van locale compactheid met het feit dat daarin slechts de existentie voor ieder punt van een omgeving met bepaalde eigenschap wordt verlangd en wel als gevolg van de omstandigheid dat de groep metrisch is. De verzameling van de natuurlijke getallen is een voorbeeld van een oneindige verzameling die in R geen verdichtingspunt heeft, zodat R inderdaad niet compact is.

Blijkens deel I van M1 is ook de multiplicatieve topologische groep

[1]) Euclides, 28e jaargang 1952/1953; dit artikel wordt aangeduid door M1.

R^*_+ locaal compact (zie aldaar stelling 1). Daarbij zij opgemerkt dat de locale compactheid een topologische eigenschap is (in tegenstelling tot de volledigheid) zodat het daarbij geen verschil maakt of men uitgaat van de topologie T_m of van de ermede aequivalente T^*_a.

De volgende eigenschap is fundamenteel voor al hetgeen volgt.

Stelling. Op iedere locaal compacte topologische groep G bestaat een absoluut additieve links (rechts) invariante maat die niet identiek nul is. Deze maat, die men de maat van Haar van de groep noemt, is, afgezien van een constante factor, eenduidig bepaald.

Het bewijs van deze stelling kan hier niet worden gegeven [2]). Volstaan moet worden met een toelichting. Overigens zij opgemerkt dat de van deze stelling gegeven bewijzen verlopen onafhankelijk van de existentie van een logarithmische functie.

Zij geven een verzameling E. Een absoluut additieve maat op E is een reële verzamelingsfunctie $\mu(A)$ met waarden $\geqq 0$ en $\leqq \infty$, gedefiniëerd voor de verzamelingen A, behorende tot eén systeem S van deelverzamelingen van E met de volgende eigenschappen:

1° Het verschil van twee verzamelingen uit S is weer een verzameling van S;

2° De som en de doorsnede van iedere rij van verzamelingen uit S is een verzameling van S;

3° Is A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ een rij verzamelingen uit S die twee aan twee geen punten gemeen hebben, dan is

$$\mu(\sum_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i); \qquad (1)$$

4° Iedere verzameling van S is de som van ten hoogste een aftelbaar oneindig aantal verzamelingen van S die ieder een eindige maat hebben.

De verzamelingen van het systeem S heten meetbaar. Opgemerkt zij, dat bij deze definitie van het begrip maat geen onderstellingen zijn gemaakt omtrent de verzameling E; in het bijzonder is niet ondersteld dat op E een topologie is gedefiniëerd.

De stelling drukt uit, dat er op iedere locaal compacte topologische groep G een maat in deze zin bestaat die bovendien de volgende eigenschap heeft.

---

[1]) Zie A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Actualités sci. et ind. (Paris 1940) p. 30 e.v. Een verschillend bewijs vindt men in Note I, On Haar's measure by Stefan Banach, in het boek van Saks, Theory of the integral (New York 1937).

Deze maat is oorspronkelijk ingevoerd door A. Haar in Der Maasbegriff in der Theorie der kontinuirlichen Gruppen, Ann. of Math. t. 34 (1933), p. 147.

Zij A een verzameling in de groep G, die multiplicatief zij genoteerd. Is $\lambda \in G$, dan zij met λA aangegeven de verzameling die bestaat uit de elementen λx als x de verzameling A doorloopt. Dan geldt: is A meetbaar, dan is ook λA meetbaar voor iedere $\lambda \in G$ en

$$\mu(\lambda A) = \mu(A).$$

Men drukt deze eigenschap uit door te zeggen dat de maat links invariant is. Is de groep commutatief — hetgeen in het vervolg het geval zal zijn — dan behoeft geen onderscheid te worden gemaakt tussen rechtse en linkse invariantie.

Voor een additieve groep drukt deze invariantie-eigenschap uit dat de maat invariant is bij translatie van de verzameling:

$$\mu(\lambda + A) = \mu(A).$$

Is μ een invariante maat, dan is voor iedere constante $C > 0$ uiteraard ook $C\mu$ een invariante maat. De stelling zegt, dat hiermede alle absoluut additieve invariante maten op G zijn uitgeput.

Men bewijst, dat de compacte verzamelingen meetbaar zijn en een eindige maat hebben. Voorts dat de maat van G dan en slechts dan eindig is indien G compact is.

Toegepast op de additieve groep R voert de stelling tot de maat van Lebesgue (niet de Jordan-maat, die ten grondslag ligt aan de Riemannse integraal, daar die nl. niet absoluut additief doch slechts additief voor een eindig aantal verzamelingen is).

Toepassing op de groep R_+^* zal voeren tot een definitie van de logarithmische functie. Zij μ een maat van Haar op R_+^*; de constante factor blijft voorlopig nog onbepaald, uiteraard op een vast getal gefixeerd; hieromtrent volgt later nader.

Eigenschap 1. *Iedere verzameling* $\{x\}$ *bestaande uit één punt* x *is meetbaar en men heeft*

$$\mu(\{x\}) = 0.$$

Dit is een gevolg van de invariantie van de maat in verband met de eigenschap dat μ eindig is voor iedere compacte verzameling. Was nl. $\mu(\{x_0\}) = a \neq 0$, dan was voor iedere $x \in R_+^*$ ook $\mu(\{x\}) = a \neq 0$.

Ieder interval (x, y), $y > x > 0$, in R_+^* is meetbaar. Wegens eigenschap 1 behoeft voor het bepalen van de maat niet te worden aangegeven of de randpunten al dan niet tot het interval behoren. Uit de invariantie van de maat volgt

$$\mu((x, y)) = \mu((\lambda x, \lambda y))$$

voor alle $\lambda > 0$. Men heeft dus ook

$$\mu((x, y)) = \mu((1, yx^{-1})) = \mu((xy^{-1}, 1)). \qquad (2)$$

Eigenschap 2. *Voor ieder interval* $(x, y), x < y$, *geldt*

$$\mu((x, y)) \text{ is eindig } > 0.$$

Indien deze eigenschap niet waar was, was er in verband met (2) een interval $(1, x_0)$, $x_0 > 1$, waarvoor $\mu((1, x_0)) = 0$ was. Herhaalde toepassing van (2) voert tot

$$\mu((x_0^{n-1}, x_0^n)) = 0 \quad n = \ldots -1, 0, +1, \ldots$$

Wegens (1) was dan $\mu((0, \infty)) = 0$; de maat was dan identiek nul, hetgeen niet is ondersteld.

Eigenschap 3. *Als* $x > 1$ *geldt*

$$\lim_{x \to 1} \mu((1, x)) = 0.$$

Zij, hetgeen voor het bewijs is geoorloofd,

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \to 1$$

en zij ter afkorting het interval $(1, x)$, waarbij thans het getal 1 niet tot het interval wordt geacht te behoren, aangeduid door i_x. Dan is

$$(i_{x_1} - i_{x_2}) + (i_{x_2} - i_{x_3}) + \ldots = i_{x_1}.$$

Wegens de absolute additiviteit van de maat is

$$\mu(i_{x_1} - i_{x_2}) + \mu(i_{x_2} - i_{x_3}) + \ldots = \mu(i_{x_1}).$$

Het rechterlid is eindig. Beschouwt men een rest van de reeks in het rechterlid, dan volgt daaruit de te bewijzen eigenschap.

Voor intervallen (x, y) beschouwd, is de maat $\mu((x, y))$ een functie van twee veranderlijken x en y. Met behulp van de betrekking (2) kan hieruit een functie van één veranderlijke worden afgeleid. Daartoe zij voor $x > 0$ een functie $H(x)$ als volgt gedefiniëerd:

$$\left.\begin{array}{l} H(x) = \mu((1, x)) \text{ voor } x > 1 \\ H(1) = 0 \\ H(x) = -H\left(\frac{1}{x}\right) \text{ voor } 0 < x < 1 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Deze functie heeft de volgende eigenschappen.

1°
$$H(x) > 0 \text{ voor } x > 1$$
$$H(x) < 0 \text{ voor } x < 1.$$

Deze ongelijkheden volgen uit de definitie van $H(x)$ in verband met de eigenschap 2.

2° $H(x)$ is een monotoon stijgende functie.

Voor $x > 1$ ziet men dit als volgt in. Als $1 < x < y$ geldt wegens

de additiviteit van de maat en wegens de eigenschap 2

$$\mu((x, y)) = \mu((1, y)) - \mu((1, x)) = H(y) - H(x) > 0.$$

De eigenschap bewijst men vervolgens algemeen door de verschillende mogelijke gevallen te beschouwen.

3° $H(x)$ is een continue functie voor $x > 0$.

De continuïteit voor $x = 1$ is een gevolg van de eigenschap 3 en de definitie van $H(x)$. Algemeen bewijst men de continuïteit door passende generalisatie van deze laatste eigenschap (analoog te bewijzen).

4°
$$H(x) \to \infty \text{ als } x \to \infty$$
$$H(x) \to -\infty \text{ als } x \to 0.$$

Indien $H(x)$ als $x \to \infty$ een eindige limiet had (wegens de monotoniteit bestaat een limiet) was $\mu((0, \infty))$ eindig, zoals men inziet door toepassing van de betrekking

$$\mu((1, x)) = \mu\left(\left(\frac{1}{x}, 1\right)\right)$$

en de additiviteit van de maat. Wegens een hiervoor aangehaalde algemene eigenschap van de maat van Haar is dit niet mogelijk omdat de groep niet compact doch slechts locaal compact is. De limiet $-\infty$ als $x \to 0$ volgt dan uit de definitie van $H(x)$ voor $0 < x < 1$ (zie (3)).

5° Voor alle $x > 0$, $y > 0$ geldt

$$H(xy) = H(x) + H(y).$$

Deze eigenschap worde aangetoond voor het geval $x > 1$, $y > 1$; de andere mogelijke gevallen bewijst men analoog in verband met de definitie van $H(x)$. Toepassing van de additieve eigenschap van de maat μ op de intervallen $(1, x)$, (x, xy) en $(1, xy)$ geeft

$$\mu((1, x)) + \mu((x, xy)) = \mu((1, xy))$$

of

$$\mu((1, x)) + \mu\left(\left(1, \frac{xy}{x}\right)\right) = \mu((1, xy)).$$

Dus

$$H(x) + H(y) = H(xy).$$

Het voorgaande geldt voor een willekeurige maat van Haar op R_+^*, vastgelegd door een bepaalde waarde van de constante factor, waarin de verschillende maten van elkaar verschillen. Wegens de eigenschappen van $H(x)$ is er dan één getal $a > 1$ zodanig, dat

$$H(a) = 1.$$

Omgekeerd kan men, bij een willekeurig gekozen getal $a > 1$, door passende keuze van de constante factor, een maat μ zó bepalen, dat

$$\mu((1, a)) = 1$$

en daarbij op de aangegeven wijze een functie $H(x)$ op R_+^* construeren.

De functie $H(x)$ heeft blijkens het voorgaande de eigenschappen van de logarithmische functie. In het bijzonder is

$$H(a^n) = n$$

voor gehele positieve n.

Men ziet gemakkelijk in, dat $H(x)$ een eenduidige omkeerfunctie $H^{-1}(x)$ heeft die de gewone eigenschappen van de exponentiële functie bezit. Voor het verband tussen de functionaalvergelijkingen

$$H(xy) = H(x) + H(y),$$

en

$$H^{-1}(x + y) = H^{-1}(x) \,.\, H^{-1}(y)$$

zie men het artikel M1. In het bijzonder is

$$H^{-1}(n) = a^n$$

als n een natuurlijk getal is. Uit het verband tussen de beide functies volgt

$$H^{-1}(H(x)) = x \quad (x > 0) \tag{4}$$

Het voorgaande rechtvaardigt de notatie

$$\log x = H(x)$$

en

$$a^x = H^{-1}(x).$$

De betrekking (4) wordt dan

$$a^{\log x} = x$$

Het getal a zij daarom het grondtal van de logarithme genoemd.

De logarithme verschijnt hier voor waarden $x \geqq 1$ dus als maat van Haar van het interval $(1, x)$. Blijkens de definitie van $H(x)$ geldt deze betrekking voor waarden $0 < x < 1$ niet meer [1]).

In het voorgaande is een definitie gegeven van de logarithme voor grondtallen > 1. Op volkomen analoge wijze kan de definitie plaatsvinden voor een grondtal $0 < a < 1$.

Uitgaande van een maat μ definiëert men daartoe een functie $H'(x)$ als volgt:

[1]) Definiëert men een functie die voor alle waarden van x gelijk is aan de maat van het interval $(1, x)$, dan gelden voor deze functie niet meer al de in het voorgaande voor $H(x)$ afgeleide eigenschappen.

$$\left.\begin{array}{l} H'(x) = \mu((x, 1)) \text{ voor } 0 < x < 1 \\ H'(1) = 0 \\ H'(x) = -H'\left(\frac{1}{x}\right) \text{ voor } x > 1 \end{array}\right\}$$

Er is dan één getal $0 < b < 1$ zó, dat

$$H'(b) = 1.$$

$H'(x)$ is dan de logarithme voor het grondtal b. Uit de gelijkheden (2) volgt dan gemakkelijk de relatie

$${}^{a}\log x = -{}^{1/a}\log x.$$

Hiermede is dan de aansluiting bij de klassieke analyse verkregen.

§ 3. Geheel in aansluiting op de hiervoor omschreven methode om de logarithmische functie in te voeren kan de differentiëerbaarheid van $\log x$ worden bewezen en het differentiaalquotiënt worden bepaald.

Zij $a > 1$ het grondtal van de logarithme; de bijbehorende maat van Haar zij μ. In aansluiting bij de problemen van de differentiëerbaarheid van verzamelingsfuncties en de voorstelling van een dergelijke functie als integraal van haar differentiaalquotiënt, zij gevraagd een functie $f(x)$ te bepalen, gedefiniëerd voor $x > 0$ en continu voor $x > 0$, zodanig, dat voor intervallen (x, y) met $x < y$ geldt

$$\mu((x, y)) = \int_x^y f(t)dt.$$

Wegens de invariantie van de maat zal $f(x)$ moeten voldoen aan de relatie

$$\int_x^y f(t)dt = \int_{rx}^{ry} f(t)dt$$

voor alle $r > 0$.

In het byzonder zal dus gelden voor $x > 1$

$$\int_1^x f(t)dt = \int_r^{rx} f(t)dt \quad (r > 0).$$

Hieruit volgt door substitutie van $t = ru$ in de tweede integraal

$$\int_1^x f(t)dt = r\int_1^x f(ru)du.$$

Daar $f(x)$ continu wordt ondersteld voor $x > 0$ volgt hieruit door differentiatie naar x

$$f(x) = rf(rx).$$

Stelt men hierin $x = x_0$, waarin x_0 een constant getal > 1 is, en

$$f(x_0) = C',$$

dan is dus

$$C' = rf(rx_0).$$

Daaruit volgt, als $C = C'x_0$

$$f(x) = \frac{C}{x} \quad (x > 0).$$

Bij iedere positieve waarde van C is aldus een niet negatieve absoluut additieve intervalfunctie

$$C\int_{x_1}^{x_2}\frac{dt}{t}$$

bepaald die de invariantie-eigenschap bezit:

$$C\int_{x_1}^{x_2}\frac{dt}{t} = C\int_{rx_1}^{rx_2}\frac{dt}{t}$$

Uitgaande van deze intervalfunctie construeert men op bekende, hier niet nader aan te geven, wijze een absuluut additieve maat op R_+^* die door de intervalfunctie eenduidig bepaald is en voor intervallen overeenstemt met de intervalfunctie [1]). De invariantie van de maat blijft daarbij behouden, zodat deze maat, wegens de eenduidige bepaaldheid van de maat van Haar, afgezien van een constante factor, inderdaad een maat van Haar op R_+^* is.

Toegepast op intervallen $(1, x)$ $(x > 1)$ is dus

$$\log x = C\int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Uit de definitie (3) van $\log x$ voor $0 < x \leqq 1$ volgt de geldigheid van deze formule voor $x > 0$.

Gaat men uit van een gegeven grondtal $a > 1$, dan is

$$\log a = 1 = C\int_1^a \frac{dt}{t},$$

dus

$$C = \left(\int_1^a \frac{dt}{t}\right)^{-1}.$$

Geeft men omgekeerd de constante $C > 0$, dan is het grondtal a daarbij bepaald. De functie

[1]) Men zie hiervoor het reeds genoemde boek van Saks.

$$C \int_1^x \frac{dt}{t}$$

is nl. een monotoon stijgende functie die voor $x = 0$ gelijk aan 0 is en nadert tot ∞ als $x \to \infty$. Voor één en slechts één getal $a > 1$ is dus

$$C \int_1^a \frac{dt}{t} = 1$$

en dit getal is het grondtal van de logarithme.

Gaat men in dit laatste geval uit van de waarde $C = 1$, dan vindt men als grondtal het getal e bepaald door

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$$

en men verkrijgt dan de Neperiaanse logarithmen.

Op analoge wijze corresponderen, zoals men gemakkelijk inziet, de logarithmen met grondtal < 1 met negatieve waarden van de constante C. Uit (5) volgt tenslotte

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{C}{x}.$$

§ 4. Past men dezelfde beschouwingen toe op de eveneens locaal compacte groep R, waarvoor de maat van Haar dan de maat van Lebesgue is, dan komt men tot de lineaire functie ax met de functionele relatie

$$F(x) + F(y) = F(x + y)$$

en $F(0) = 0$.

De beschouwing van de locaal compacte multiplicatieve groep R^* van de reële getallen $\neq 0$ voert niet tot resultaten. De maat van Haar blijkt dan nl. ∞ te zijn voor iedere meetbare verzameling die zowel positieve als negatieve getallen bevat en slechts eindig te zijn voor verzamelingen die of alleen positieve of alleen negatieve getallen bevatten (dit is niet in strijd met de invariantie van de maat daar het hier gaat over een multiplicatieve groep als gevolg waarvan een verzameling met zowel positieve als negatieve getallen niet door vermenigvuldiging kan worden overgevoerd in een verzameling met of alleen positieve of alleen negatieve getallen). Deze omstandigheid belet een analoge doorvoering van de in het voorgaande ontwikkelde beschouwingen.

Haskell B. Curry, *Leçons de logique algébrique* (Collection de logique mathématique Série A II). Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts, 1952.

In dit boekje wordt de uitsprakenrekening behandeld als een deel van de algebra, in het bijzonder van de theorie der tralies (lattice theory). In het eerste hoofdstuk zet de schrijver uiteen, wat naar zijn opvatting een formeel systeem is. Volgens hem heeft een formeel systeem altijd betrekking op een systeem van dingen, die hij obs noemt, waarbij zekere operaties gegeven zijn, die uit obs nieuwe obs vormen, en verder zekere praedicaten, die met behulp van de obs elementaire proposities voortbrengen. De obs worden voorgesteld door symbolen in een kunstmatige taal A, die voldoende rijk moet zijn om alle elementaire proposities te kunnen uitdrukken. Deze taal A wordt aan de gewone omgangstaal toegevoegd, Men behoeft niet te weten wat de obs zijn en wat de operaties en de praedicaten betekenen; het is voldoende te weten dat zij aan de in A geformuleerde axioma's voldoen.

Deze opvatting wijkt af van de gebruikelijke, dat de formele taal los blijft staan van de omgangstaal, die gebruikt wordt om over de formele taal te spreken. In dit geval treedt de omgangstaal op als meta-taal en de stellingen over de formele taal, bijv. de stelling die de niet-strijdigheid van de formele taal uitspreekt, heten meta-theorema's. Bij Curry treden deze stellingen op als epi-theorema's; hieronder verstaat hij stellingen, die in de omgangstaal na adjunctie van A geformuleerd kunnen worden. Zijn beschouwingen op dit gebied zijn philosophisch interessant, maar hebben weinig invloed op de verdere opbouw van de theorie.

Het verband van de propositierekening met de tralietheorie is bekend. Tot dusver heeft men meestal de propositierekening als toepassing van de tralietheorie behandeld; Curry legt het accent anders, doordat hij uit de tralietheorie alleen datgene behandelt wat voor de logica van belang is. Uitgaande van het begrip van een gedeeltelijk geordende verzameling voert hij achtereenvolgens de tekens voor conjunctie, disjunctie en implicatie met bijbehorende axioma's in. Hij geeft daardoor een duidelijke, uitvoerige inleiding in de propositierekening, beschouwd als een hoofdstuk van de algebra.

Het hoofdstuk over de negatie verdient speciale aandacht. Er waren drie systemen bekend, waarin de negatie verschillende eigenschappen heeft: het klassieke (C), het intuitionistische (J) en het minimale (M). Curry voegt hier een vierde aan toe, het stricte (D). In M wordt de negatie ingevoerd door de definitie

$$\neg a = a \supset f,$$

waarbij f willekeurig constant is, in J door

$$\neg a = a \supset 0,$$

D resp. C ontstaat uit M, resp. J door toevoeging van het axioma van het uitgesloten derde. Elk van deze systemen wordt onderzocht en op hun onderlinge relaties wordt ingegaan.

Het boek geeft een uitstekende inleiding in de logica voor hen die deze als een hoofdstuk van de algebra willen zien. Doordat naast de zuiver algebraische opbouw telkens ook de aequivalente calculus in de traditionele vorm wordt beschouwd, is het ook zeer geschikt voor hen, die deze calculus bijv. uit Hilbert-Bernays kennen en over de aansluiting met de algebra nader willen worden ingelicht.

A. Heyting

Jean-Louis Destouches, *Méthodologie. Notions géometriques.* (Traité de physique théorique et de physique mathématique I). Paris, Gauthier-Villars 1953. XIV + 228 blz.

Dit boek, dat bedoeld is als inleidend deel van een uit vele delen bestaand leerboek der theoretische en mathematische physica, bestaat uit twee afdelingen van geheel verschillend karakter. In de eerste afdeling, die ongeveer 70 bladzijden beslaat, bespreekt de schrijver uitvoerig de aard en de structuur van een physische theorie in het algemeen, en de eisen, die aan een goede physische theorie gesteld moeten worden. Een physische theorie in voltooide vorm is een deductief systeem, waarin uit zekere axioma's volgens bepaalde regels conclusies worden afgeleid. Onder de termen van dit systeem moeten enkele op bepaalde metingen betrokken zijn, zodat sommige uitspraken als resultaten van metingen geinterpreteerd kunnen worden, dan wel als voorspellingen van resultaten van metingen, die nog gedaan moeten worden. De theorie is adequaat in een bepaald gebied van experimenten, als de voorspellingen, die zij geeft, in dit gebied uitkomen. Het gedeelte der natuurkunde, waarin men de physische theorieën van dit standpunt uit bestudeert en ontwikkelt, is de mathematische natuurkunde. Van het standpunt van de physicus gezien, verwaarloost deze, naar de schrijver betoogt,

een essentieel onderdeel, dat hij „synthèse inductive" noemt, en dat bestaat in de opbouw der theorie, uitgaande van de experimentele resultaten. Hierbij worden stukken van oude theorieën, die elkaar soms gedeeltelijk tegenspreken, door middel van min of meer gewaagde analogieredeneringen tot een nieuwe theorie verwerkt. Deze inductieve synthese, die gewoonlijk tot het voorwetenschappelijke stadium gerekend wordt vormt, zoals de schrijver terecht opmerkt, de voornaamste taak van de theoretische physicus. Uitvoerig wordt nagegaan, aan welke eisen een physische theorie moet voldoen, waarbij onderscheid wordt gemaakt tussen macrophysische en microphysische theorieën.

In het tweede gedeelte worden enige wiskundige theorieën behandeld, die in de moderne physica een belangrijke rol spelen. Achtereenvolgens komen de symbolische logica, de verzamelingsleer, de theorie der abstracte ruimten, de projectieve, de affiene en de euclidische meetkunde ter sprake, terwijl een kort slothoofdstuk aan de theorie der zwaartepunten en traagheidsmomenten gewijd is. De behandelingswijze is zeer abstract en algemeen. Zo wordt de meetkunde behandeld volgens Menger als een toepassing van de theorie der tralies (lattice theory). De schrijver geeft van deze moderne wijze van opbouw van de meetkunde een helder, goed leesbaar overzicht; weliswaar worden enkele bewijzen niet volledig gegeven, maar deze zijn gemakkelijk aan te vullen. Daar een zo nauw bij de theorie der tralies aansluitende opbouw niet eerder gepubliceerd is, is dit hoofdstuk ook voor wiskundigen interessant. Of inderdaad de gebruikte methode voor physici de beste is, zal de toekomstige ontwikkeling der mathematische physica moeten beslissen. Nadat de theorie der lineaire deelruimten achtereenvolgens in een n- dimensionale projectieve en in een n-dimensionale affiene ruimte is behandeld, wordt door invoering van het scalaire product van twee vectoren, met bijbehorende axioma's, de overgang naar de metrische meetkunde verkregen. Afzonderlijke paragrafen zijn gewijd aan de reductie van een systeem glijdende vectoren en aan die van een systeem vaste vectoren. In de laatste vindt men een uitvoerig bewijs van de stelling van Le Roux, die, wanneer men de vectoren als krachten interpreteert, als volgt luidt: Wanneer een vast lichaam M in evenwicht is onder de werking van een krachtenstelsel S, dan is S equivalent met een stelsel aantrekkings- en afstotingskrachten tussen punten van M, die aan de wet „actie = reactie" voldoen; er zijn twee triviale uitzonderingsgevallen.

De „exercices" aan het eind van ieder hoofdstuk lopen zeer uiteen in moeilijkheid; sommige zijn eenvoudige directe toepassingen

van de theorie, terwijl andere als onderwerp voor een proefschrift zouden kunnen dienen. Samenvattend: Dit is een belangrijk boek, waarin onderwerpen van zeer uiteenlopende aard op degelijke en originele wijze besproken worden.

A. Heyting

Hao Wang et Robert Mc Naughton, *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles* (Collection de logique mathématique, série A IV). Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts; 1953. 54 blz.

In dit boekje behandelt de schrijver de verschillende axiomastelsels die voor de verzamelingsleer zijn opgesteld met het doel, de contradicties, waartoe de opbouw van Cantor bleek te voeren, te vermijden en toch zo nauw mogelijk bij het intuitieve redeneren aan te sluiten. Achtereenvolgens komen ter sprake de typentheorie (T), het stelsel van Zermelo (Z) en de uitbreiding daarvan met het „Ersetzungsaxiom" volgens Fraenkel (ZF), het stelsel van von Neumann in de vorm die Bernays er aan heeft gegeven (B), Quine's „New Foundations" (NF) en het stelsel van zijn „Mathematical Logic" (ML). Voor elk van deze theorieën wordt het stelsel axioma's aangegeven; gevolgtrekkingen uit de axioma's worden niet afgeleid, maar wel wordt, meestal zonder bewijs, op enkele fundamentele vragen ingegaan. Zo geeft de schrijver voor verschillende systemen een intuitief model aan. Hij merkt op, dat de consistentie van Z in ZF bewezen kan worden, waaruit volgt, dat ZF essentieel sterker is dan Z. Een bewijs, met behulp van de moderne modeltheorie, voor de stelling dat de consistentie van ZF uit die van B volgt, wordt aangeduid. Ten slotte bouwt de schrijver een rij stelsels T_1, T_2, ... op, waarvan T_1 de theorie der eindige verzamelingen (natuurlijke getallen) beschrijft, terwijl T_n de daarover gebouwde typentheorie tot en met type n is. Voor elke n is T_n sterker dan T_{n-1}; iedere T_n is zwakker dan Z of T. In het laatste hoofdstuk worden nog enkele interessante resultaten over de vergelijking der sterkte van verschillende stelsels afgeleid.

Het boekje geeft binnen de gestelde grenzen een goed en helder overzicht en vormt een geschikte inleiding tot diepere studie op dit gebied. Een uitvoerige bibliografie is bijgevoegd. Het is uitgevoerd in offsetdruk, die technisch op hoog peil staat. Enkele drukfouten bemoeilijken de lectuur; vooral de verminking op enige plaatsen van $\supset$ tot $=$ is hinderlijk.

A. Heyting